Chap OM2: solutions de l'équation de d'Alembert

On note $s(x,t)$ la perturbation en x à l'instant t, elle vérifie l'équation de d'Alembert de la forme:

Nous étudierons dans ce chapitre trois types de solution de l'équation de d'Alembert: les ondes planes progressives, les ondes planes progressives harmoniques et les ondes stationnaires.

I. **Solution en onde plane progressive dite OPP**

1. Définitions

Onde progressive: on considère une onde qui se propage sans déformation selon l'axe Ox avec une célérité c.

Onde plane:

En pratique: lorsque l'onde se propage selon Ox, l'onde est plane si la perturbation ne dépend que de x.

2. Ecriture de $s(x,t)$

Si l'onde se propage selon $+Ox$, le signal $s(x,t)$ se met sous la forme $s(x,t) = f(x-ct)$ ou $s(x,t) = g(t-\frac{x}{c})$ où f et g sont des fonctions quelconques.
Cette solution vérifie bien l'équation de d'Alembert en effet:

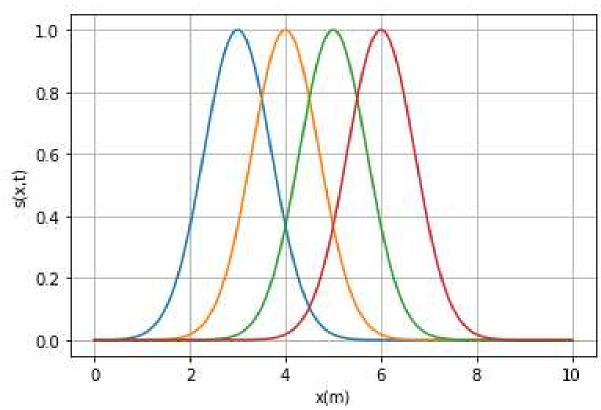
Sens physique: $s(x+\Delta x, t+\Delta t) =$

Si l'onde se propage selon $-Ox$, le signal $s(x,t)$ se met sous la forme $s(x,t) = f(x+ct)$ ou $s(x,t) = g(t+\frac{x}{c})$ où f et g sont des fonctions quelconques.
Cette solution vérifie bien l'équation de d'Alembert en effet:

Sens physique: $s(x - \Delta x, t + \Delta t) =$

Exemple:

```
x=np.linspace(0,10,500)
for i in range(3,7):
    plt.plot(x,np.exp(-(x-i)**2))
    plt.xlabel('x(m)')
    plt.ylabel('s(x,t)')
plt.grid()
plt.show()
```



A retenir: la solution générale en OPP s'écrit:

II. Solution en onde plane progressive harmonique (OPPH) appelée aussi onde plane progressive monochromatique (OPPM).

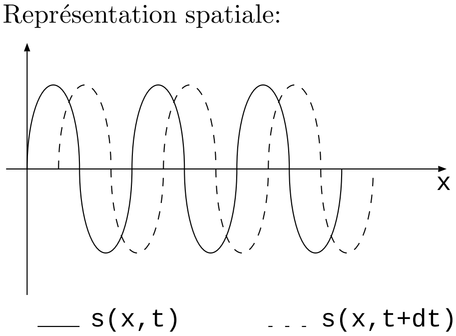
1. Ecriture de $s(x,t)$

On retient qu'une onde progressive harmonique:

- se propageant selon $+Ox$ s'écrit:

- se propageant selon $-Ox$ s'écrit:

Représentation spatiale:



Une telle onde a une double périodicité:

2. Notation complexe

A la grandeur réelle $s(x,t) = S_0 \cos(\omega t - kx)$ on associe le complexe $\underline{s}(x,t) = S_0 e^{j(\omega t - kx)}$.

Intérêts de la notation complexe :

$\dfrac{\partial}{\partial x} = ...$ $\qquad$ $\dfrac{\partial}{\partial t} = ...$

$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} = ...$ $\qquad$ $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} = ...$

Retour à la notation réelle:

Remarque : les expressions des opérateurs dérivées partielles en notation complexe dépendent du choix de l'expression de l'OPPH.

Pour $\underline{s}(x,t) = S_0 e^{j(kx - \omega t)}$. On a alors:

$\dfrac{\partial}{\partial x} = ...$ $\qquad$ $\dfrac{\partial}{\partial t} = ...$

$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} = ...$ $\qquad$ $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} = ...$

3. Relation de dispersion

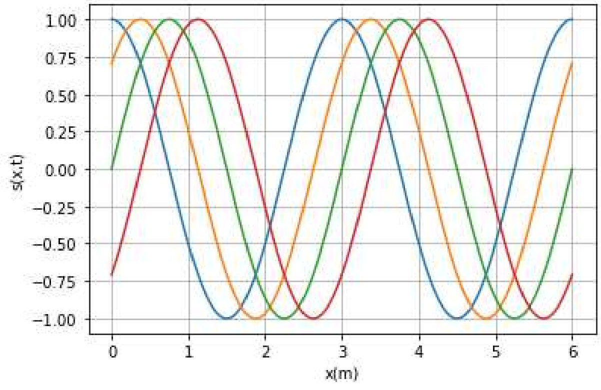
La relation de dispersion est la relation entre k et ω. On la trouve en remplaçant la solution en OPPH dans l'équation de d'Alembert:

- en notation réelle:

- en notation complexe:

Exemple:

```python
lamba=3.
T=2.
omega=2*np.pi/T
k=2*np.pi/lamba
x=np.linspace(0,2*lamba,500)
for i in range(0,4):
    plt.plot(x,np.cos(omega*i*T/8-k*x))
    plt.xlabel('x(m)')
    plt.ylabel('s(x,t)')
plt.grid()
plt.show()
```



III. **Solution en onde stationnaire dite OS**

Une onde stationnaire est une onde qui ne se propage pas, dans l'expression du signal

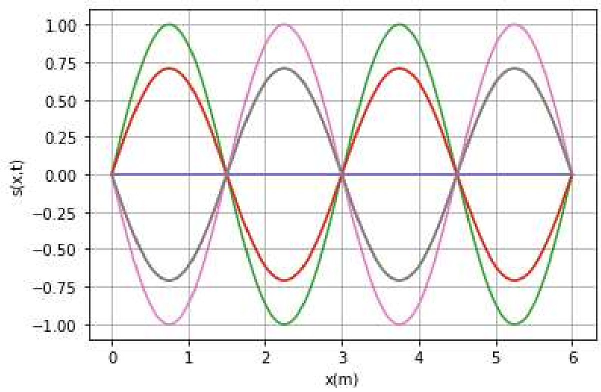
1. Ecriture de $s(x, t)$

Pour une OS, le signal est de la forme

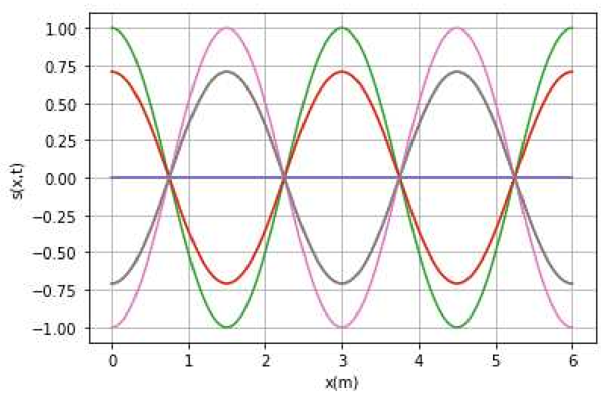
Relation de dispersion: c'est la relation entre k et ω. On la trouve en remplaçant la solution en OPPH dans l'équation de d'Alembert:

Exemple:

```python
lamba=3.
T=2.
omega=2*np.pi/T
k=2*np.pi/lamba
x=np.linspace(0,2*lamba,500)
for i in range(0,8):
    plt.plot(x,np.sin(omega*i*T/8)*np.sin(k*x))
    plt.xlabel('x(m)')
    plt.ylabel('s(x,t)')
plt.grid()
plt.show()
```




```python
for i in range(0,8):
    plt.plot(x,np.sin(omega*i*T/8)*np.cos(k*x))
    plt.xlabel('x(m)')
    plt.ylabel('s(x,t)')
plt.grid()
plt.show()
```



Une onde OS est caractérisée par des noeuds (points où le signal est nul à tout instant) et des ventres (points où le signal est maximal, en valeur absolue, à tout instant).

Position des noeuds:

Position des ventres:

IV. **Choix d'une solution**

Une OPPH peut être vue somme la superposition de deux OS:

Une OS peut être vue comme la superposition de deux OPPH:

Les solutions en OPPH et en OS sont donc équivalentes.
Dans le cas d'une onde se propageant dans un espace de taille infinie, on choisit pour solution

Dans le cas d'une onde se propageant dans un espace de taille finie, on choisit pour solution