DS 6 de physique

Le sujet comprend quatre problèmes indépendants à traiter dans l'ordre de votre choix. Il est demandé de numéroter les pages au format i/N où i est le numéro de la page et N le nombre total de pages. Toute loi, tout résultat,... doit être justifié.

I. Problème I: circulation sanguine dans le cou de la girafe

Le long cou de la girafe a suscité plusieurs controverses parmi les spécialistes, particulièrement pour les problèmes de circulation sanguine (hémodynamique). Le but du sujet est d'examiner certains aspects de la question, notamment la pression artérielle au niveau du cœur et du cerveau ou encore le rôle exact du réseau de fines artères permettant au sang d'accéder au cerveau (le rete mirabile caroticum).

Données numériques:

Masse volumique et viscosité du sang : $\rho = 1,06.10^3\ kg.m^{-3}$ et $\eta = 3,9.10^{-3}\ Pa.s$

Unité de pression: $1\ mmHg = 133,3\ Pa$

Diamètre interne de l'artère carotidienne: $D = 8,2\ mm$

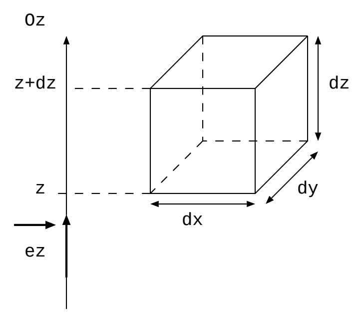
Débit volumique dans l'artère carotidienne: $D_{v,carotide} = 40\ cm^3.s^{-1}$

Débit volumique total dans le rete carotidien: $D_v = 2,1\ cm^3.s^{-1}$

Champ de pesanteur: $g = 9,8\ m.s^{-2}$

Statique des fluides

1. Soit une particule fluide de masse volumique ρ placée en $M(x, y, z)$ comprise entre $x + dx$, $y + dy$ et $z + dz$. Cette particule est placée dans le champ de pression $P(z)$ où Oz désigne la verticale ascendante. Déduire d'un bilan des forces de pression exercées sur les faces de la particule fluide, l'expression de la résultante des forces de pression subies par cette particule. Que devient cette expression dans le cas où la pression s'écrit $P = P(x, y, z)$?



2. Le référentiel terrestre est supposé galiléen, établir la relation fondamentale de la statique des fluides.

3. Le sang est un liquide incompressible de masse volumique ρ. On note z la coordonnée verticale ascendante. Exprimer la loi $P(z)$ dans le cas où $P(z = 0) = P_0$.

4. On se place ici dans un description purement hydrostatique.

On étudie la pression sanguine de la girafe qui se tient droite. On suppose que la pression sanguine au niveau du cerveau de la girafe est en moyenne égale à 100 $mmHg$. Calculer les pressions moyennes au niveau du coeur et au niveau des pattes. Donner les résultats en Pa et en $mmHg$.

La girafe est en train de boire. On suppose que la pression moyenne au niveau du coeur dans ce cas est de 175 $mmHg$, estimer la pression moyenne au niveau du cerveau. Donner le résultat en Pa et en $mmHg$.

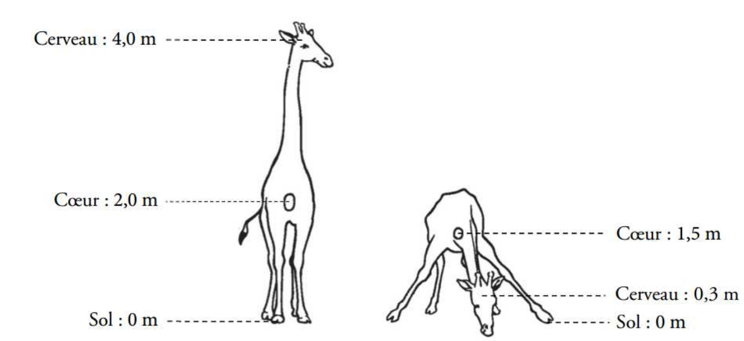
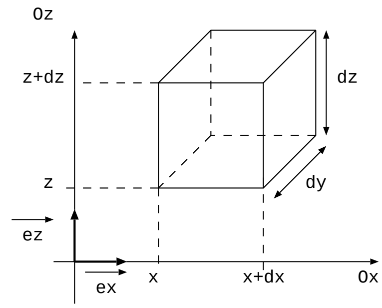


Figure 1. Hauteurs du cœur et du cerveau en position dressée (à gauche) et baissée (à droite).

Etude de la circulation sanguine

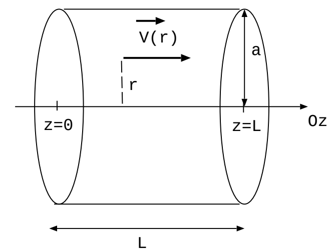
5. Le sang est un fluide de viscosité dynamique η. Dans un écoulement de la forme $\overrightarrow{v} = v(z)\overrightarrow{e_x}$, la force exercée sur une surface de fluide dS placée en z par le fluide au dessus s'écrit $d\overrightarrow{F} = \eta dS \dfrac{dv}{dz}(z)\overrightarrow{e_x}$.

Soit une particule fluide placée en $M(x, y, z)$ comprise entre $x + dx$, $y + dy$ et $z + dz$. Déduire d'un bilan des forces de viscosité exercées sur les faces de la particule fluide, l'expression de la résultante des forces de viscosité subies par cette particule. Que devient cette expression dans le cas où la vitesse s'écrit $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(x, y, z)$?



6. Ecrire l'équation de Navier Stokes dans le référentiel d'étude supposé galiléen, en précisant son unité et en nommant chaque terme.

On étudie l'écoulement du sang de viscosité η et de masse volumique ρ dans un vaisseau assimilé à un cylindre de rayon a et de longueur L aux parois rigides. On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z). Le gradient de pression est uniforme et on note $\Delta P = P(z = 0) - P(z = L)$. L'écoulement est stationnaire et on note $\overrightarrow{v}(M) = v(r)\overrightarrow{e_z}$ le champ des vitesses. On néglige les effets de pesanteur.



7. Donner, en le justifiant, le signe de ΔP pour que le fluide s'écoule selon $+Oz$.

8. On donne, en coordonnées cylindriques, l'opérateur gradient $\overrightarrow{\text{grad}} = \dfrac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$ et le Laplacien du vecteur vitesse $\Delta\overrightarrow{v} = [\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial v}{\partial r}) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}]\overrightarrow{e_z}$.

Simplifier l'équation de Navier-Stokes.

9. Montrer que la pression ne dépend ni de r, ni de θ.

10. On admet que $\dfrac{dP}{dz}$ est une constante notée C. Exprimer C en fonction de ΔP et L et montrer que $v(r) = \dfrac{\Delta P}{4\eta L}(a^2 - r^2)$.

11. Exprimer D_v, le débit volumique à travers la section du tuyau.

On admet pour la suite que $D_v = \dfrac{\Delta P \pi a^4}{8\eta L}$.

12. On définit la résistance hydraulique par $R_H = \dfrac{\Delta P}{D_v}$. Justifier cette expression par une analogie électrique et en déduire l'expression de la résistance hydraulique du tuyau étudié de longueur L, de rayon a, parcouru par un fluide de viscosité η. Comment évolue la résistance hydraulique lorsque la viscosité du fluide augmente? le rayon du tuyau augmente? Justifier physiquement.

Le rôle du rete carotidien de la girafe

Chez la girafe,le sang qui irrigue le cerveau passe par un réseau complexe appelé rete mirabile caroticum (réseau admirable carotidien) ou rete carotidien. Le rete carotidien est représenté schématiquement sur la Figure 2 (en bas). Il peut être modélisé par un réseau de n fines artères (chaque artère a pour diamètre interne: $d = 100\ \mu m$ et pour longueur: $L = 150\ \mu m$). Ce réseau de n fines artères est modélisé par n résistances hydrauliques en parallèle (Figure 2 en haut où seulement 4 résistances sont représentées). On prendra $n = 90$.

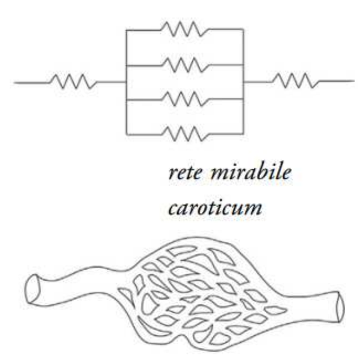


Figure 2. Schéma du *rete* carotidien (bas) et modélisation (haut).

Selon une première théorie, le rôle du rete carotidien de la girafe serait de protéger le cerveau des augmentations excessives de pression notamment lorsque la girafe baisse la tête pour boire.

13. Estimer la résistance hydraulique du rete mirabile caroticum dans le modèle de la Figure 2.

14. En déduire une estimation numérique, en Pa et en mmHg, de la chute de pression dans le rete carotidien à l'aide des données.

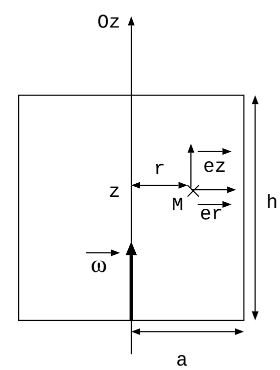
15. Estimer numériquement, en Pa et en mmHg, la chute de pression si le rete carotidien était remplacé par une artère unique de section égale à la somme des sections des n fines artères du modèle de la Figure 2. Conclure.

16. Définir le nombre de Reynolds et déduire des données une estimation du nombre de Reynolds de la circulation sanguine dans une carotide de la girafe et du nombre de Reynolds dans une fine artère du rete. Conclure.

II. Problème I: enrichissement de l'uraninium par ultracentrifugation

L'uranium naturel, mélange d'isotopes constitué à $99,3$ % d'uranium U^{238}, est le combustible des centrales nucléaires. Il est présent naturellement dans l'écorce terrestre. Les principales mines se trouvent en Australie, au Canada et en Russie. Le yellow - cake, obtenu après purification et transformation du minerai, contient deux isotopes de l'uranium: U^{238} et U^{235}. L'uranium U^{235} est le seul qui soit susceptible de subir la fission. Pour l'utilisation de l'uranium dans les centrales nucléaires, il faut disposer d'un combustible dont la proportion d'uranium U^{235} fissile se situe entre 3 % et 5 %. Deux principaux procédés d'enrichissement ont été développés à l'échelle industrielle: la diffusion gazeuse et l'ultracentrifugation. L'ultracentrifugation étudié ici a pour but d'utiliser la force centrifuge pour séparer, compte tenu de leur masse différente, les isotopes U^{235} et U^{238} de l'uranium. On transforme alors l'uranium naturel en hexafluorure d'uranium (UF_6) sous forme gazeuse que l'on introduit à l'intérieur d'un bol : la centrifugeuse.

Le bol utilisé pour l'ultra-centrifugation a la forme d'un cylindre de rayon a et hauteur h. Il est animé, par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen, d'un mouvement de rotation uniforme autour de son axe (Oz) à la vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega} = \omega\overrightarrow{e_z}$. Il contient N molécules de masse molaire M_0 d'un gaz supposé parfait de masse volumique ρ. On admet que le gaz atteint un état d'équilibre dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au cylindre à la température T supposée constante (on est donc en régime permanent). On ne tient pas compte de la pesanteur. On repère une particule fluide par ses coordonnées cylindriques. On note R la constante des gaz parfaits.



On donne, en coordonnées cylindriques, l'opérateur gradient $\overrightarrow{\text{grad}} = \dfrac{\partial}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$.

1. Faire un bilan des forces exercées sur une particule fluide de volume $d\tau$ et de masse volumique ρ, dans le référentiel $\mathcal{R}'$. On note P la pression du gaz supposé parfait.

2. Montrer que P ne dépend que de r et que $P(r)$ s'écrit: $P(r) = P(0)e^{\frac{M_0\omega^2 r^2}{2RT}}$ où $P(0)$ désigne la pression sur l'axe Oz.

3. En déduire l'expression de $N^*(r)$, le nombre de molécules par unité de volume dans le cylindre à la distance r de l'axe (Oz) en fonction des données de l'énoncé et de $N^*(0)$, nombre de molécules par unité de volume sur l'axe Oz.

4. Le dispositif précédent est à la base de la méthode d'enrichissement de l'uranium par ultracentrifugation. L'hexafluorure d'uranium UF_6, mélange gazeux des deux isotopes UF_6^{235} et UF_6^{238} de masses molaires respectives $M_{235} = 349\ g/mol$ et $M_{238} = 352\ g/mol$, est introduit dans des cylindres de rayon a qui tournent à la vitesse angulaire ω constante. La température est T.

On écrit le code suivant:

```
def f(M,T):
——a,R,omega=0.1,8.314,25000*2*np.pi/60
——return np.exp(M*omega**2*a**2/2/R/T)
print('q1=',f(0.349,300))
print('q2=',f(0.349,400))
print('q3=',f(0.352,300))
print('q4=',f(0.352,400))
```

Son exécution donne:

```
q1= 120.92146745387201
q2= 36.465112412586556
q3= 126.00987605684176
q4= 37.61000908207317
```

Que représentent q_1, q_2, q_3 et q_4? Commenter ces valeurs.

On définit le facteur de séparation par $\tau = \dfrac{N^*_{238}(a)N^*_{235}(0)}{N^*_{235}(a)N^*_{238}(0)}$. Utiliser les résultats du code pour calculer τ et dire s'il est préférable de travailler à basse ou à haute température pour séparer les deux isotopes.