TD ondes sonores dans les fluides

I. **Utilisation des impédances acoustiques**

Le son se propage à la vitesse c_0 dans un matériau de masse volumique ρ_0 pour $x < 0$ puis à la vitesse c_1 dans un matériau de masse volumique ρ_1 pour $0 < x < l$ et enfin à la vitesse c_2 dans un matériau de masse volumique ρ_2 pour $x > l$. On donne les vitesses particulaires:

Pour $x < 0$: $v_0(x,t) = A_0 \cos(\omega t - k_0 x)$

Pour $0 < x < l$: $v_1(x,t) = A_1 \cos(\omega t - k_1 x) + B_1 \cos(\omega t + k_1 x)$

Pour $x > l$: $v_2(x,t) = A_2 \cos(\omega t - k_2 x)$

Exprimer k_0, k_1 et k_2 en fonction des données et de la pulsation ω. Ecrire les expressions des surpressions acoustiques dans chacun des trois milieux et écrire, sans les résoudre les équations de continuité de la surpression et de la vitesse.

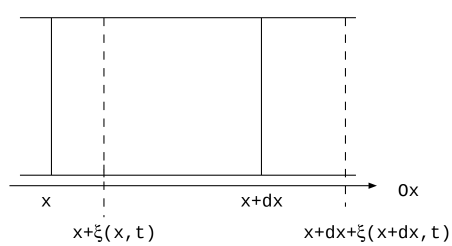
II. **Equation de propagation**

On étudie la propagation d'une onde sonore. On note $p(x,t) = P(x,t) - P_0$ (la surpression), $\xi(x,t)$ (le déplacement de le tranche de fluide en x à l'instant t) et $\mu(x,t) = \rho(x,t) - \rho_0$ (l'écart de la masse volumique par rapport à sa valeur ρ_0 à l'équilibre).

1. On se place dans l'approximation acoustique, rappeler en quoi consiste cette approximation.

2. Ecrire l'équation d'Euler et en déduire une relation entre ρ_0 et les dérivées partielles de p et ξ.

3. On donne la représentation d'un système élémentaire de fluide de section S compris entre x et $x + dx$ à l'équilibre et compris entre $x + \xi(x,t)$ et $x + dx + \xi(x + dx, t)$ en présence d'une onde. Montrer que la variation relative de volume du système s'écrit $\dfrac{V - V_0}{V} = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$. En déduire l'expression du coefficient de compressibilité isentropique en fonction de p et d'une dérivée partielle de ξ.



4. Déduire des questions précédentes l'équation de propagation de la variable déplacement $\xi(x,t)$.

Réponses: 2- $\rho_0 \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}$ 3- $p\chi_S = -\dfrac{\partial \xi}{\partial x}$

III. **Surpression dans un tuyau d'orgue**

On considère un tuyau d'orgue rempli d'air de masse volumique $\rho(x,t) = \rho_0 + \rho_1(x,t)$. On note $p_1 = P - P_0$, la surpression acoustique et v_1, la vitesse particulaire. La célérité du son est notée c. Le tuyau est fermé en $x = 0$ et ouvert en $x = L$. On cherche $p_1(x,t)$ sous la forme $p_1(x,t) = p_m \cos(\omega t)\cos(kx + \phi)$. ρ_1, p_1 et v_1 sont des infiniment petits d'ordre 1.

1. De quel type d'onde s'agit-il? Justifier physiquement ce choix.

2. Ecrire l'équation d'Euler et la simplifier dans le cadre de l'approximation acoustique. En déduire l'expression de la vitesse particulaire en fonction de p_m, ω, c, ρ_0, k, x et ϕ.

3. Déduire des conditions aux limites la valeur de ϕ et les fréquences f_n des ondes sonores émises par ce tuyau. Vérifier la cohérence du résultat à l'aide de schémas.

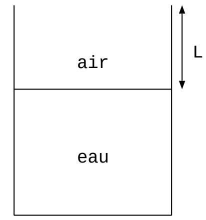
4. L'amplitude maximale de déplacement des particules est $\xi_{mm} = 0,4\ mm$. En déduire p_m, l'amplitude de la surpression et v_m, l'amplitude de la vitesse particulaire pour la fréquence fondamentale f_0. Commenter. Données : $L = 60\ cm$, $\rho_0 = 1,3\ kg/m^3$ et $c = 340\ m/s$.

Réponses: 2- $v_1(x,t) = \dfrac{p_0}{\rho_0 c}\sin(\omega t)\sin(kx)$ 3- $f_0 = \dfrac{c}{4L}$ 4- $p_m = 157\ Pa$

IV. **Notation complexe**

Soit une onde sonore dont la surpression s'écrit en notation complexe $\underline{p}(x,t) = p_0 e^{j(\omega t - kx)}$. Ecrire l'équation d'Euler et la simplifier dans l'approximation acoustique, en déduire l'expression de l'onde de vitesse $\underline{v}(x,t)$. On définit l'impédance acoustique par $\underline{Z} = \dfrac{\underline{p}}{\underline{v}}$. Exprimer $\underline{Z}$ pour cette onde.

V. **Verre d'eau chanteur**



En tapant avec une petite cuillère sur un verre d'eau, on met en vibration la colonne d'air de hauteur L.

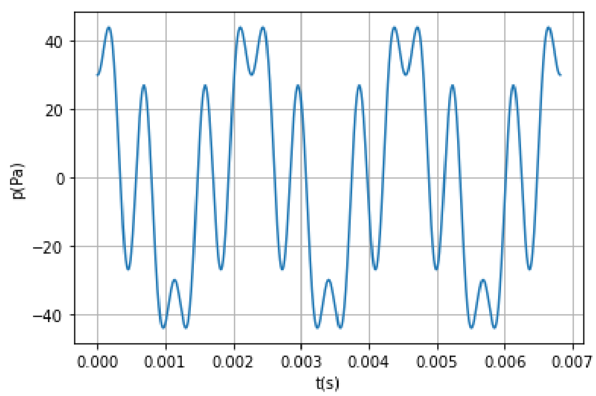
1. A quelle fréquence f correspond une hauteur $L = 48\ mm$?

2. Comment obtenir une fréquence plus aigue une octave au dessus (soit une fréquence du double f)?

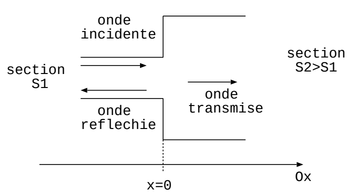
Réponses: 1- $f = 1770\ Hz$ 2- $L = 24\ mm$

VI. **Tuyau sonore**

On donne l'enregistrement d'un tuyau sonore ouvert des deux côtés l'autre. L'air est à la température $T = 300\ K$ et est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29\ g.mol^{-1}$ tel que $\gamma = 1,4$. Lire la fréquence du son émis et en déduire la longueur de ce tuyau. Donner l'allure du spectre du son émis.



VII. **Propagation dans un tuyau de section variable**



On écrit la surpression de l'onde incidente $v_i = v_0 \cos(\omega t - kx)$. On note les coefficients de réflexion et de transmission pour la vitesse particulaire:

$$r = \frac{v_r(0,t)}{v_i(0,t)} \text{ et } \tau = \frac{v_t(0,t)}{v_i(0,t)}.$$

1. Exprimer les vitesses particulaires des ondes réfléchie et transmise, $v_r(x,t)$ et $v_t(x,t)$. En déduire les surpressions des ondes incidente, réfléchie et transmise, $p_i(x,t)$ $p_r(x,t)$ et $p_t(x,t)$.

2. Ecrire les deux équations de continuité en $x = 0$. En déduire r et τ en fonction de S_1 et S_2.

3. Dans le cas particulier où $S_1 << S_2$, donner les valeurs approchées de r et τ et en déduire les expressions des ondes de vitesse et de surpression pour $x < 0$ et $x > 0$. Commenter.

4. On définit la puissance acoustique à travers une section S par $P = I.S =< p.v > .S$. On définit les coefficients de réflexion et de transmission en puissance par $R = \dfrac{|P_r(x=0)|}{P_i(x=0)}$ et $T = \dfrac{|P_t(x=0)|}{P_i(x=0)}$.

Exprimer les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance. Vérifier que $R + T = 1$. Que traduit cette égalité?

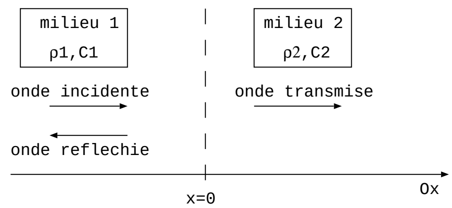
5. Donner les expressions approchées de R et T pour les cas: $S_1 = S_2$, $S_1 << S_2$ et $S_1 >> S_2$. Commenter.

6. Pourquoi la trompette possède-t-elle un pavillon?

Réponses : $r = \dfrac{S_2 - S_1}{S_1 + S_2}$ *et* $\tau = \dfrac{2S_1}{S_2 + S_1}$, $R = (\dfrac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2})^2$ *et* $T = \dfrac{4S_1S_2}{S_1 + S_2}$

VIII. **Discontinuité entre deux milieux : transmission et réflexion des ondes sonores**

On étudie la propagation d'une onde plane progressive harmonique suivant les x croissants. Le plan $x = 0$ sépare les deux milieux d'impédances caractéristiques $\rho_1 c_1$ et $\rho_2 c_2$. On note $\alpha = \dfrac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}$.



On écrit la surpression de l'onde incidente $p_i = p_0 \cos(\omega t - k_1 x)$. On note les coefficients de réflexion et de transmission pour la surpression $r = \dfrac{p_r(0,t)}{p_i(0,t)}$ et $\tau = \dfrac{p_t(0,t)}{p_i(0,t)}$.

1. Ecrire les surpressions $p_r(x,t)$ et $p_t(x,t)$, associées aux ondes réfléchie et transmise. Ecrire également les vitesses particulaires $v_i(x,t)$, $v_r(x,t)$, et $v_t(x,t)$. En déduire les expressions des intensités acoustiques de l'onde incidente I_i, de l'onde réfléchie I_r et de l'onde transmise I_t en fonction de p_0, ρ_1, c_1, ρ_2, c_2, r et τ.

2. En $x = 0$, écrire les deux équations de continuité. En déduire les expressions de r et de τ en fonction de α.

3. On définit les coefficients de réflexion R et de transmission T en énergie par $R = \dfrac{|I_r(x=0)|}{I_i(x=0)}$ et $T = \dfrac{I_t(x=0)}{I_i(x=0)}$. Exprimer R et T en fonction de α. Vérifier que $R + T = 1$. Que traduit cette égalité?

4. Le milieu 1 est de l'air et le milieu 2 est de l'eau. Calculer R, T et T_{dB}. Commenter.

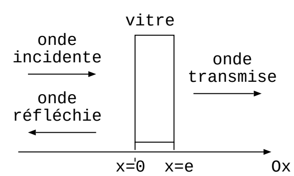
5. Les impédances caractéristiques des muscles et de l'air pour les ondes acoustiques utilisées en échographie valent respectivement $Z_m = 1,7.10^6\ SI$ et $Z_a = 440\ SI$.

Calculer les coefficients de réflexion et de transmission en puissance des ondes acoustiques au niveau d'une interface air-muscle. Commenter.

Réponses: $r = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ et $\tau = \dfrac{2\alpha}{\alpha + 1}$, $R = (\dfrac{\alpha - 1}{\alpha + 1})^2$ et $T = \dfrac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$

IX. **Isolation phonique**

On souhaite étudier l'atténuation sonore résultant de la traversée d'une vitre d'épaisseur e, d'aire S et constituée de masse volumique ρ_v. L'onde sonore se propage à la célérité c_s dans l'air de masse volumique ρ_0 au repos.



L'onde est partiellement réfléchie sur la vitre alors qu'un onde est transmise et se propage dans l'air après traversée de la vitre. On note les vitesses en représentation complexe:

$\underline{v}_i = Ae^{j(\omega t - kx)}$ pour $x < 0$, $\underline{v}_r = \underline{B}e^{j(\omega t + kx)}$ pour $x < 0$ et $\underline{v}_t = \underline{D}e^{j(\omega t - kx + ke)}$ pour $x > e$

1. Ecrire les surpressions complexes $\underline{p}_i$, $\underline{p}_r$ et $\underline{p}_t$ associées aux ondes incidente, réfléchie et transmise.

2. On considère que la vitre se comporte comme un solide. Elle est donc indéformable mais susceptible de se déplacer. Montrer que $A + \underline{B} = \underline{D}$.

3. Exprimer l'accélération de la vitre de deux façons différentes : en fonction de j, ω, A et $\underline{B}$ ou en fonction de j, ω, et D.

4. Appliquer la RFD à la portion de vitre de surface S et en déduire que $j\omega\rho_v e\underline{D} = 2\rho_0 c_s(A - \underline{D})$. En déduire que $\dfrac{\underline{D}}{A} = \dfrac{1}{1 + j\frac{\omega\rho_v e}{2\rho_0 c_s}}$.

5. Exprimer le coefficient de transmission en puissance $T = |\dfrac{\underline{D}}{A}|^2$. Calculer T à BF et à HF. En déduire la nature du filtre ainsi constitué.

Réponses : 1- $p = \rho_0 c_s v$ pour une $OPPH^+$ et $p = -\rho_0 c_s v$ pour une $OPPH^-$, 2a- continuité de la vitesse $v(0,t) = v_i(0,t) + v_r(0,t) = v_t(0,t)$, 2e- $T = \dfrac{1}{1 + (\frac{\rho_v e\omega}{2\rho_0 c_s})^2}$, filtre passe-bas