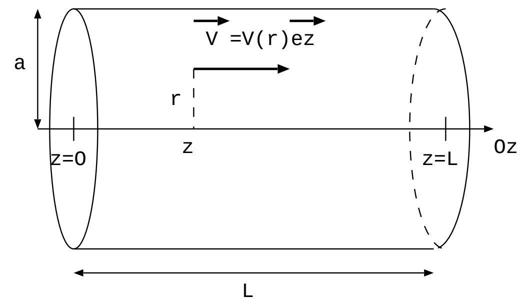
DS 6 de physique

I. Problème 1: circulation du sang dans une artère

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité η dans un tuyau cylindrique immobile dans le référentiel d'étude galiléen, centré sur l'axe Oz, de rayon a et de longueur L. Nous sommes en présence d'un écoulement de Poiseuille cylindrique. Le champ de pression s'écrit $P(z) = (P_B - P_A)\dfrac{z}{L} + P_A$. Le champ des vitesses est de la forme $\vec{v} = v(r)\vec{e_z}$. On néglige les effets de la pesanteur.



1. Que représentent P_A et P_B? Prévoir le signe de $v(r)$ pour $P_A > P_B$?

2. Ecrire l'équation de Navier-Stokes en précisant son unité et la signification de chaque terme.

En coordonnées cylindriques: $\overrightarrow{\text{grad}} = \dfrac{\partial}{\partial r}\vec{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{e_z}$ et $\Delta v(r) = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(r\dfrac{dv}{dr})$

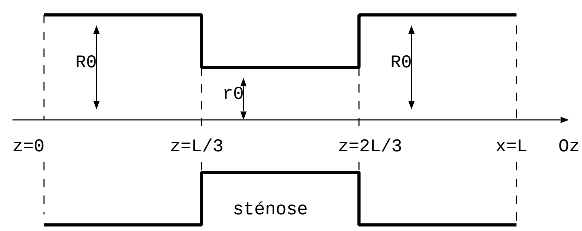
3. Simplifier puis projeter l'équation de Navier-Stokes sur $\vec{e_r}$ et $\vec{e_z}$ et en déduire le champ des vitesses.

4. Exprimer le débit volumique du sang dans l'artère.

5. On définit la résistance hydraulique par $R_H = \dfrac{P_A - P_B}{D_v}$. Expliquer cette définition par une analogie avec la résistance électrique. Exprimer la résistance hydraulique de l'artère. Comment évolue la résistance hydraulique quand on diminue la section de l'artère? Préciser le sens physique de cette évolution.

On étudie dans la suite une artère atteinte d'une sténose (soit un rétrécissement).

6. Le tiers central du tronçon d'artère de longueur L, est le siège d'une sténose. Dans cette portion centrale, le rayon intermédiaire r_0 est plus petit que le rayon R_0 de l'artère non altérée. Le tronçon d'artère de longueur L est partagé en trois portions de même longueur $L/3$. On représente la coupe diamétrale du vaisseau atteint d'une sténose.

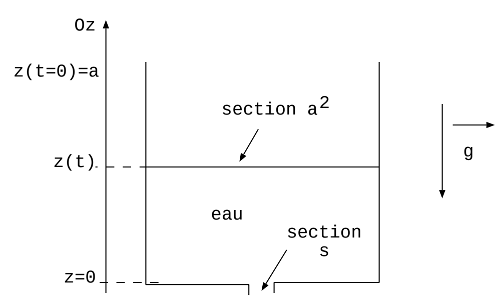


Faire un schéma électrique équivalent de l'artère sténosée et exprimer D_{vs} le nouveau débit volumique sanguin dans l'artère atteinte de sténose. Préciser l'expression de D_{vs} en fonction de D_v (débit volumique de l'artère saine). Comparer D_{vs} et D_v. Quelle conséquence physiologique est déduite de ce résultat ?

II. Problème 2: remplissage et vidange d'un aquarium

A- Vidange d'un aquarium

On souhaite vidanger par gravité un aquarium cubique d'arête $a = 1,0\ m$ via une vanne située en dessous d'un aquarium. La section de la canalisation d'évacuation vaut $s = 10\ cm^2$. A l'instant $t = 0$, l'aquarium est rempli d'eau sur une hauteur a, on ouvre le robinet et l'aquarium se vide suffisamment lentement pour que l'on suppose que l'écoulement est quasi stationnaire. L'eau est assimilé à un fluide parfait de masse volumique ρ.



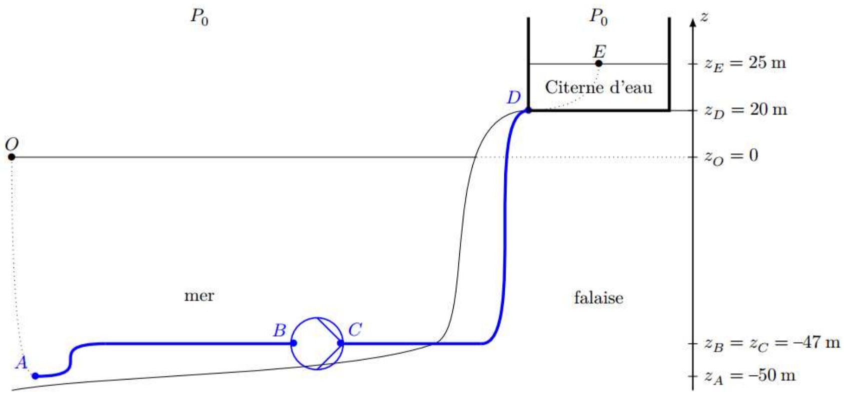
1. Montrer que la vitesse du fluide en un point A de la surface libre de l'aquarium s'écrit $v_A = \sqrt{\dfrac{2gz(t)}{\frac{a^4}{s^2} - 1}}$.

2. Rappeler la relation entre v_a et $\dfrac{dz}{dt}$ et en déduire τ, le temps de vidange de l'aquarium

3. On se place dans le cas où la section de l'aquarium est très grande devant la section du trou de vidange soit $a^2 >> s$. Montrer que le terme $\frac{||\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}||}{g}$ est très petit. Conclure.

B- Pompage de l'eau de mer

Pour s'approvisionner en eau peu polluée, un musée puise cette ressource dans la mer à une profondeur de 50 m pour l'acheminer jusqu'à une citerne. On choisit pour le repérage des altitudes un axe vertical ascendant (Oz) ayant pour origine O le niveau de la mer.



Données: accélération de la pesanteur: $g = 9,8\ m.s^{-2}$, masse volumique de l'eau $\rho = 1,0.10^3\ kg.m^{-3}$, viscosité de l'eau $\eta = 1,0.10^{-3}\ Pa.s$.

Une pompe immergée fonctionne en permanence avec un débit volumique $Q_v = 40\ m^3.h^{-1}$. Celle-ci est comprise entre les points B et C située à l'altitude $z_B = z_C = -47\ m$. Le lieu de captage de l'eau se trouve au point A d'altitude $z_A = -50\ m$. On appelle circuit d'aspiration le tuyau reliant le point A lieu de captage au point B entrée de la pompe. Celui-ci a une longueur L_a et un diamètre $D_a = 0,20\ m$.

On appelle circuit de refoulement le tuyau reliant le point C, sortie de la pompe au point D, entrée de la citerne. Ce tuyau a une longueur L_r et un diamètre $D_r = 0,20\ m$.

Le remplissage de la citerne se fait au point D d'altitude z=20 m. La surface libre de l'eau de la citerne est à l'altitude $z_E = 25\ m$. On considère que pression de l'air atmosphérique est uniforme et vaut $P_0 = 1,0.10^5\ Pa$.

4. Calculer v, la vitesse de l'eau dans les tuyaux.

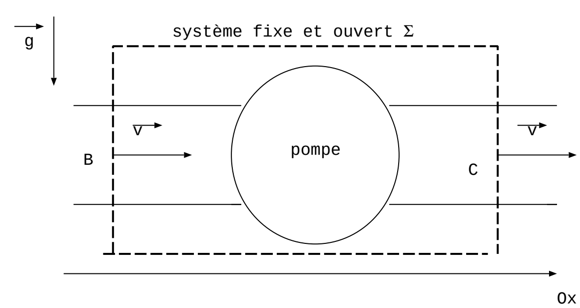
5. Calculer $\mathcal{R}e$, le nombre de Reynolds associé à l'écoulement de l'eau dans les canalisations. En déduire la nature du régime d'écoulement.

6. Rappeler les hypothèses nécessaires à l'application de la relation de Bernoulli.

En déduire l'expression de la différence de pression entre les points O et B en fonction de ρ, g, v et z_B.

En déduire l'expression de la différence de pression entre les points C et E en fonction de ρ, g, v et z_C et z_E.

La pompe entre B et C constitue un système ouvert Σ. En régime stationnaire, ce volume de contrôle contient à l'instant t une masse d'eau $M(t)$ à laquelle on associe une énergie mécanique $E_m(t)$. Pour établir le bilan d'énergie mécanique, on doit définir un système fermé Σ^* qui, à l'instant t, est constitué de $M(t)$ et d'une masse entrante dans la pompe δm_e à la vitesse $\vec{v}$ et, à l'instant $t + dt$ est constitué de $M(t + dt)$ et d'une masse sortante de la pompe δm_s à la vitesse $\vec{v}$.



7. Donner les expressions de l'énergie mécanique du système fermé $\Sigma*$ soit $E_m^*(t)$ et $E_m^*(t+dt)$ aux instants t et $t + dt$. En déduire que la dérivée de l'énergie mécanique du système fermé $\frac{dE_m^*}{dt}$ est nulle.

8. Exprimer les puissances des forces de pression qui s'exercent sur le système.

9. Déduire du théorème de la puissance mécanique la puissance mécanique $\mathcal{P}_m$ de la pompe nécessaire à ce captage d'eau de mer. Faire l'application numérique.