DS 6 de physique

I. **Correction : circulation du sang dans une artère**

1. On a $P(z=0)=P_A$ et $P(z=L)=P_B$. Pour $P_A>P_B$, le fluide s'écoule selon $+Oz$ car il s'écoule des fortes vers les basses pressions donc $v(r)>0$.

2. L'équation de Navier-Stokes s'écrit:

$$\rho(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v})=\rho\vec{g}-\overrightarrow{\text{grad}}P+\eta\Delta\vec{v}$$

Cette équation est en $N.m^{-3}$.

$\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$ est l'accélération de la particule fluide

Dans le membre de droite, il y a les forces volumiques: poids, pression et viscosité.

3. En régime stationnaire on a $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}=\vec{0}$.

L'accélération convective se calcule en deux temps: $\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}}=v(r)\dfrac{\partial}{\partial z}$ et $(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}=v(r)\dfrac{\partial}{\partial z}(v(r)\vec{e_z}=\vec{0}$.

La force de pression s'écrit $-\overrightarrow{\text{grad}}P=-\dfrac{\partial P}{\partial z}\vec{e_z}=-\dfrac{P_B-P_A}{L}\vec{e_z}$.

Le poids est négligé.

La force de viscosité s'écrit $\eta\Delta\vec{v}=\eta\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(r\dfrac{dv}{dr})\vec{e_z}$ (attention: le vecteur vitesse est selon $\vec{e_z}$, le Laplacien de $\vec{v}$ est aussi selon $\vec{e_z}$).

D'où l'équation de Navier Stokes en projection sur Oz: $0=-\dfrac{P_B-P_A}{L}+\eta\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}(r\dfrac{dv}{dr})$ soit $\dfrac{d}{dr}(r\dfrac{dv}{dr})=\dfrac{(P_B-P_A)r}{\eta L}$.

On intègre une première fois par rapport à r: $r\dfrac{dv}{dr}=\dfrac{(P_B-P_A)r^2}{2\eta L}+A$ soit $\dfrac{dv}{dr}=\dfrac{(P_B-P_A)r}{2\eta L}+\dfrac{A}{r}$

On intègre une deuxième fois par rapport à r: $v(r)=\dfrac{(P_B-P_A)r^2}{4\eta L}+A\ln r+B$.

Tout d'abord, on remarque que $v(r)$ contient un terme explosif, soit un terme qui diverge: $\ln r$ diverge pour $r\to 0$ donc $A=0$.

On trouve B avec la condition aux limites: le fluide visqueux adhère aux parois soit $v(r=a)=0$ (attention en coordonnées cylindriques $r>0$ et $r=a$ contient tous les points à la surface du cylindre). On a donc $v(r=a)=0=\dfrac{(P_B-P_A)a^2}{4\eta L}+B$.

D'où le champ des vitesses $v(r)=\dfrac{(P_A-P_B)}{4\eta L}(a^2-r^2)$.

4. Le débit volumique s'écrit $D_v=\displaystyle\iint v(M)dS(M)$ où M est un point de la surface perpendiculaire à la vitesse, ici cette surface est un disque et M est repéré par r et θ sur ce disque soit $dS=dr\ r\ d\theta$.

Donc $D_v=\dfrac{(P_A-P_B)}{4\eta L}\displaystyle\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a(a^2r-r^3)dr=\dfrac{(P_A-P_B)}{4\eta L}2\pi(\dfrac{a^4}{2}-\dfrac{a^4}{4})=\dfrac{(P_A-P_B)\pi a^4}{8\eta L}$.

5. Dans la loi d'Ohm: $U=V_1-V_2=Ri$, U est la différence de potentiel qui met en mouvement les charges et i est un débit de charges.

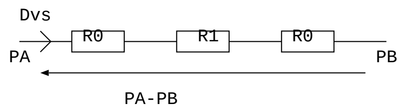
Dans $P_A-P_B=R_HD_v$: P_A-P_B est la différence de pression qui met en mouvement le fluide et D_v est le débit de fluide.

On a $R_H=\dfrac{P_A-P_B}{R_H}=\dfrac{8\eta L}{\pi a^4}$: la résistance hydraulique mesure l'opposition du fluide à passer dans le tuyau, plus la résistance est grande plus le fluide a du mal à passer, le débit volumique est faible.

L'expression de R_H montre que la résistance est grande quand le fluide est très visqueux (η grand), quand le tuyau est long (L grand) et étroit (a petit).

6. Dans l'artère le débit volumique se conserve donc les résistances associées aux différents tronçons sont parcourues par le même courant, les résistances sont donc en série.

Le modèle électrique de l'artère est composée de $R_0 = \dfrac{8\eta L}{3\pi R_0^4}$ et $R_1 = \dfrac{8\eta L}{3\pi r_0^4}$. La résistance équivalente est $2R_0 + R_1$.



Artère saine: $P_A - P_B = \dfrac{8\eta L}{\pi a^4} D_v$.

Artère avec sténose: $P_A - P_B = (2R_0 + R_1)D_{vs} = \dfrac{8\eta L}{\pi R_0^4}(\dfrac{2}{3} + \dfrac{R_0^4}{3r_0^4})D_{vs}$

On a donc $\dfrac{D_{vs}}{D_v} = \dfrac{1}{\frac{2}{3} + \frac{R_0^4}{3r_0^4}} < 1$ car $\frac{2}{3} + \frac{R_0^4}{3r_0^4} > 1$. Donc le sang s'écoule moins bien dans une artère sténosée, d'où le danger pour la santé.

II. Correction: aquarium

A- Vidange d'un aquarium

1. L'écoulement est quasi-stationnaire et incompressible, le fluide est parfait et il n'y a pas de pièces mobiles, on peut donc appliquer la relation de Bernoulli sur une ligne de courant.

J'applique Bernoulli sur une ligne de courant partant d'un point A à la surface de l'eau dans l'aquarium et un point B situé au niveau de la sortie de l'eau sur l'embout.

$P_A + \rho g z_A + \dfrac{\rho v_A^2}{2} = P_B + \rho g z_B + \dfrac{\rho v_B^2}{2}$ avec $P_A = P_B = P_0$, $z_A = z(t)$, $z_B = 0$ et par conservation du débit volumique pour l'écoulement incompressible on a $v_A a^2 = v_B s$.

On en déduit donc $\rho g z(t) + \dfrac{\rho v_A^2}{2} = +\dfrac{a^4 \rho v_A^2}{2s^2}$ d'où la vitesse en A : $v_A = \sqrt{\dfrac{2gz(t)}{\frac{a^4}{s^2} - 1}}$.

2. La vitesse est égale à la dérivée de la position par rapport au temps le point A a pour position $z(t)$ donc on a $v_A = -\dfrac{dz}{dt}$ (ne pas oublier le signe $-$, z diminue donc $\dfrac{dz}{dt} < 0$ et $v_A > 0$).

On a donc une équation différentielle non linéaire, que l'on résout en séparant les variables: $\dfrac{dz}{dt} = -\sqrt{\dfrac{2gz(t)}{\frac{a^4}{s^2} - 1}}$

soit $\displaystyle\int_a^0 \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\sqrt{\frac{2g}{\frac{a^4}{s^2} - 1}} \int_0^\tau dt$ (l'aquarium se vide jusqu'à ce que $z = 0$).

On a donc $[2\sqrt{z}]_a^0 = -2\sqrt{a} = -\sqrt{\dfrac{2g}{\frac{a^4}{s^2} - 1}}\tau$ d'où $\tau = \sqrt{\dfrac{2a}{g}}\sqrt{\dfrac{a^4}{s^2} - 1}$.

3. Ordre de grandeur du terme $\dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}$: $\dfrac{v_A}{t_f} = \dfrac{g}{\frac{S^2}{s^2} - 1}$

On a donc $\dfrac{||\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}||}{g} = \dfrac{v\tau}{g} = \dfrac{v_A \tau}{g} = \sqrt{\dfrac{z}{a}}\sqrt{\dfrac{1}{\frac{a^4}{s^2} - 1}}$

z est de l'ordre de grandeur de a

a^2 est la section de l'aquarium et s la section du tuyau qui permet la vidange, on a $a^2 >> s$ donc le rapport $\sqrt{\dfrac{z}{a}}\sqrt{\dfrac{1}{\frac{a^4}{s^2} - 1}} << 1$ ce qui signifie que le terme $\rho\dfrac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t}$ est négligeable devant $\rho\overrightarrow{g}$ dans l'équation de Navier Stokes, cela justifie que l'on se soit placé dans l'approximation quasi stationnaire.

B- Pompage de l'eau de mer

4. On applique la définition du débit $Q_v = vS = v\pi\dfrac{D^2}{4}$ soit $v = \dfrac{4Q_v}{\pi D^2} = 0,35\ m.s^{-1}$.

5. Le nombre de Reynolds est défini comme étant le rapport des effets convectifs sur les effets diffusifs, son expression est $\mathcal{R}e = \dfrac{\rho v D}{\eta} = \dfrac{10^3.0,35.0,2}{10^{-3}} = 7.10^5 >> 1$: les effets convectifs l'emportent donc l'écoulement est turbulent.

6. La relation de Bernoulli s'applique pour un écoulement incompressible et permanent, pour un fluide parfait en absence de pièces mobiles soit ici on peut l'appliquer avant B et après C.

On applique Bernoulli sur une ligne de courant entre O et B: $\rho g z_O + P_O + \rho\dfrac{v_O^2}{2} = \rho g z_B + P_B + \rho\dfrac{v_B^2}{2}$

avec $z_O = 0\ m$, $P_O = P_0$ (pression atmosphérique) et $v_O = 0$ (la surface de la mer ne descend pas, on ne prend qu'une faible quantité d'eau par rapport à la quantité disponible).

On a donc $P_0 - P_B = \rho g z_B + \rho\dfrac{v^2}{2}$

On applique Bernoulli sur une ligne de courant entre C et E: $\rho g z_C + P_C + \rho\dfrac{v_C^2}{2} = \rho g z_E + P_E + \rho\dfrac{v_E^2}{2}$

avec $P_E = P_0$ (pression atmosphérique) et $v_E = 0$ (la surface de la surface ne varie pas en régime quasi stationnaire, on pompe peu d'eau par rapport à la quantité présente).

On a donc $P_0 - P_C = \rho\dfrac{v^2}{2} + \rho g(z_C - z_E)$.

7. La masse δm_e qui entre dans le système Σ entre t et $t + dt$ s'écrit $\delta m_e = D_m dt = \rho Q_v dt$ d'où $E_m^*(t) = E_m(t) + \rho Q_v dt\dfrac{v^2}{2} + \rho Q_v dt g z_B$.

La masse δm_s qui sort du système Σ entre t et $t + dt$ s'écrit $\delta m_s = \rho Q_v dt$ d'où $E_m^*(t + dt) = E_m(t + dt) + \rho Q_v dt\dfrac{v^2}{2} + \rho Q_v dt g z_C$.

On a donc $\dfrac{dE_m^*}{dt} = \dfrac{E_m^*(t + dt) - E_m^*(t)}{dt} = 0$ car $z_B = z_C$ et $v_B = v_C = v$.

8. En B, la force de pression exercée sur le système Σ s'écrit $\overrightarrow{F_B} = P_B\pi\dfrac{D^2}{4}\overrightarrow{e_x}$ d'où la puissance $\mathcal{P}_B = \overrightarrow{F_B}.\overrightarrow{v} = +P_B\pi\dfrac{D^2}{4}v = P_B Q_v > 0$: la force de pression à l'entrée du fluide est motrice.

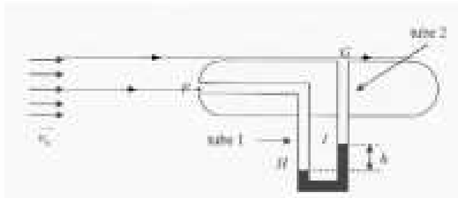
En C, la force de pression exercée sur le système Σ s'écrit $\overrightarrow{F_C} = -P_C\pi\dfrac{D^2}{4}\overrightarrow{e_x}$ d'où la puissance $\mathcal{P}_C = \overrightarrow{F_C}.\overrightarrow{v} = -P_C\pi\dfrac{D^2}{4}v = -P_C Q_v < 0$: la force de pression à la sortie du fluide est résistante.

9. Le système Σ subit son poids (de puissance nulle), les forces de pression, les actions de la canalisation sur le fluide de puissance nulle car les forces sont perpendiculaires à la vitesse du fluide et la force exercée par la pompe. Le théorème de la puissance mécanique donne: $\dfrac{dE_m^*}{dt} = \mathcal{P}_m + \mathcal{P}_B + \mathcal{P}_C = 0$ d'où $\mathcal{P}_m = -\mathcal{P_B} - \mathcal{P_C} = (P_C - P_B)Q_v = Q_v\rho g(z_E - z_C + z_B) = 2,7\ kW$.

Partie II - Instrumentation

II.1 - Tube de Pitot

Q17. La ligne de courant qui aboutit en F se termine en ce point qui est un point d'arrêt par symétrie (le fluide est au repos dans le tube). Celle qui passe en G est en fait très peu perturbée depuis l'infini car le tube est très fin.



Q18. Les conditions sont réunies pour appliquer le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant, en négligeant les effets de pesanteur. On suit alors les 2 lignes de courant précédentes.

Entre l'infini et F, on peut écrire : $P_\infty + \rho\frac{v_\infty^2}{2} = P_F + \rho\frac{v_F^2}{2}$ or $v_F = 0$ donc $\boxed{P_F = P_\infty + \rho\frac{v_\infty^2}{2}}$.

Entre l'infini et G, on obtient : $P_\infty + \rho\frac{v_\infty^2}{2} = P_G + \rho\frac{v_G^2}{2}$. Or la ligne de courant passant par G est peu perturbée par le tube donc $\boxed{v_G = v_\infty}$ et donc $\boxed{P_G = P_\infty}$.

Q19. Le liquide dans le tube est à l'équilibre. On peut donc utiliser la statique des fluides : $P_{inf} = P_{sup} + \rho_l g \Delta z$, ce qui donne ici : $\boxed{P_H - P_I = \rho g h}$.

Q20. Si on néglige les effets de pesanteur sur l'air, on peut écrire : $P_H = P_F$ et $P_I = P_G = P_\infty$. On injecte dans la relation précédente :

$$P_\infty + \rho_\infty\frac{v_\infty^2}{2} - P\infty = \rho_l g h \Rightarrow \boxed{v_\infty = \sqrt{\frac{2\rho_l g h}{\rho_\infty}}}$$

Lorsque la vitesse de l'air augmente, h augmente.