

# Correction E3A PSI 2016

## I. Partie I: Célérité de l'onde ultrasonore

1. Pour un GP, on a  $PV = nRT$  qui conduit à  $P = \frac{\mu RT}{M}$ . Ici on a donc  $p = P_0 + p_1 = \frac{\mu_0 RT_0}{M_a} + \frac{\mu_1 RT_0}{M_a}$ , ce qui permet d'en déduire  $\mu_0 = \frac{P_0 M_a}{RT_0}$  et  $\mu_1 = \frac{p_1 M_a}{RT_0}$ . L'approximation acoustique  $p_1 \ll P_0$  conduit donc à  $\mu_1 \ll \mu_0$ .

2. On a  $dm(t) = \mu(x, t)d\tau$  et  $dm(t + dt) = \mu(x, t + dt)d\tau$ .

3. En entrée du système infinitésimale, le débit massique s'écrit  $D_{me} = \mu(x, t)v(x, t)S$ . On en déduit la masse de fluide qui entre dans le système entre  $t$  et  $t + dt$ :  $\delta m_e = D_{me}dt = \mu(x, t)v(x, t)S$ .

De même, la masse qui sort du système est  $\delta m_s = \mu(x + dx, t)Sv(x + dx, t)dt$ .

4. La conservation de la masse du système élémentaire étudié s'écrit:  $m(t + dt) - m(t) = \delta m_e - \delta m_s$ , ce qui signifie que la variation de masse du système est égale à la masse qui entre moins la masse qui sort du système entre  $t$  et  $t + dt$ . On remplace les termes par les expressions trouvées:

$$\mu(x, t + dt)Sdx - \mu(x, t)Sdx = \mu(x, t)v(x, t)Sdt - \mu(x + dx, t)v(x + dx, t)Sdt$$

Soit en faisant deux DL à l'ordre 1 en dx et dt petits, on a:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} S dt dx = -\frac{\partial}{\partial x}(\mu(x, t)v(x, t)) S dx dt, \text{ il vient après simplification: } \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x, t)v(x, t)) = 0.$$

$$\text{Soit } \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 + \mu_1(x, t)) + \frac{\partial}{\partial x}((\mu_0 + \mu_1(x, t))v_1(x, t)) = 0$$

Le terme  $\mu_1 v_1$  est d'ordre 2, donc on le néglige, et  $\mu_0$  est une constante. Il reste  $\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0$  (R1).

5. L'équation d'Euler s'écrit  $\mu \left( \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\text{grad.} \vec{v}_1) \vec{v}_1 \right) = -\text{grad} P$

où  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  désigne l'accélération locale

où  $(\text{grad.} \vec{v}_1) \vec{v}_1$  désigne l'accélération convective, c'est un terme d'ordre 2 que l'on néglige

où  $-\text{grad} P = -\frac{\partial P}{\partial x} \vec{e}_x = -\frac{\partial p_1}{\partial x} \vec{e}_x$  désigne les forces de pression volumiques

Le terme  $\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$  est d'ordre 1 et le terme  $\mu_1 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$  est d'ordre 2, on le néglige.

On a donc après projection sur  $Ox$ :  $\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}$  (R2).

6. On suppose que les compressions et dilatations des couches de fluide sont très rapides, donc au cours de ces transformations, les tranches de fluide n'ont pas le temps d'échanger du transfert thermique. Les transformations sont donc supposées adiabatiques.

7. On a  $\chi_S = \frac{1}{\mu} \frac{\mu - \mu_0}{p - P_0} = \frac{1}{\mu} \frac{\mu_1}{p_1} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_1}{p_1}$  en ne gardant que les termes du premier ordre car dans  $\mu p_1 = \mu_0 p_1 + \mu_1 p_1$ , le terme  $\mu_1 p_1$  est d'ordre 2.

On a donc  $\mu_1 = \chi_S \mu_0 p_1$ .

8. On différencie R2 par rapport à  $x$ :  $\mu_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} \right) = -\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$

On différencie R1 par rapport à  $t$ :  $\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} \right)$ .

Or  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} \right)$ .

On a donc d'après ces deux équations  $\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2} = \chi_S \mu_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$  ou encore  $\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - \chi_S \mu_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0$ . On

reconnait une équation de d'Alembert de célérité  $c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \chi_S}}$ . Plus le milieu est léger ( $\mu_0$  petit) et plus le milieu est rigide ( $\chi_S$  petit ou faible compressibilité) et plus l'onde va vite.

9. Un GP en transformation adiabatique réversible suit les lois de Laplace  $PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma$  ou encore  $P \mu^{-\gamma} = P_0 \mu_0^{-\gamma}$ .

Ainsi  $P = P_0 \frac{\mu^\gamma}{\mu_0^\gamma}$  et donc  $\frac{dP}{d\mu} = P_0 \gamma \mu^{\gamma-1} \frac{1}{\mu_0^\gamma} = \frac{P}{\mu}$  ou encore  $\frac{\partial \mu}{\partial P} = \frac{\mu}{P}$  donc  $\chi_S = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial p} = \frac{1}{\gamma P}$ .

Ainsi la célérité est  $c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \chi_S}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\mu_0}}$  avec  $P_0 = \frac{\mu_0 R T}{M_a}$  soit  $c = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M_a}}$ .

10. On choisit deux points sur la droite:  $\theta_1 = 10^0 C$  et  $c_1 = 337 \text{ m/s}$ , puis  $\theta_2 = 29^0 C$ ,  $c_2 = 348 \text{ m/s}$ . La pente de la droite s'écrit  $a = \frac{c_1 - c_2}{\theta_1 - \theta_2} = 0,58 \text{ m.s}^{-1} \cdot ^0 C^{-1}$  et on déduit  $b$  de l'équation  $c_1 = a\theta_1 + b$  soit  $b = c_1 - a\theta_1 = 331 \text{ m/s}$ .

11. On a  $T = T_{273} + \theta$  avec  $\theta \ll T_{273}$ . Soit  $c = \sqrt{\frac{\gamma R T_{273}}{M_a} + \frac{\gamma R \theta}{M_a}} = \sqrt{c_0^2 + \frac{\gamma R \theta}{M_a}} = c_0 \left(1 + \frac{\gamma R \theta}{M_a c_0^2}\right)^{1/2} = c_0 \left(1 + \frac{\gamma R \theta}{2 M_a c_0^2}\right) = c_0 + \frac{\gamma R \theta}{2 M_a c_0}$ .

D'après l'énoncé, on a aussi  $c = c_0 + \frac{\gamma R}{2 M_a c_0} \theta = a\theta + b$ . Par identification, on en déduit que  $b = c_0 = 331 \text{ m/s}$  et  $a = \frac{\gamma R}{2 M_a c_0}$  soit  $\gamma = \frac{2 M_a c_0 a}{R} = 1,34$  (c'est cohérent avec  $\gamma = 1,4$  pour un GP diatomique, sachant que l'air est composé principalement de  $O_2$  et  $N_2$ ).

12. La distance  $d_m$  mesurée correspond à une vitesse de propagation  $c(\theta_{ref})$  (que l'on choisit indépendante de  $\theta$ ) et la distance réelle  $d_r$  est parcourue à la vitesse  $c(\theta)$  qui dépend de  $\theta$ . On a donc par un produit en croix, la relation  $d_m = d_r \frac{c(\theta_{ref})}{c(\theta)}$ .

On a donc  $e = d_m - d_r = d_r \frac{c(\theta_{ref})}{c(\theta)} - d_r = d_r \left(\frac{c(\theta_{ref})}{c(\theta)} - 1\right)$ : c'est cette expression que l'on trouve ligne 14. Elle est multipliée par 100 pour que le résultat soit exploitable, pas trop petit. On lit donc  $\theta_{ref} = 10^0 C$ .

Ligne 13, la valeur de  $i$  est choisit, soit la température est fixée et la boucle for portant sur  $j$  permet de calculer les valeurs de  $e$  pour la température  $\theta_i$  pour  $d_r$  compris entre 0 et 4  $m$ .

13. La température  $\theta$  prend 4 valeurs:  $\theta_1 = 0^0 C$ ,  $\theta_2 = 10^0 C$ ,  $\theta_3 = \theta_{ref} = 20^0 C$  (l'écart de distance est nulle) et  $\theta_3 = 30^0 C$  (ligne 5).

La distance  $d_r$  est comprise entre 0 et 4  $m$ , dans le linspace (ligne 7),  $d_r$  prend 41 valeurs entre 0 et 4  $m$ .

Le robot mesure la distance  $d_m$  en mesurant le temps  $\Delta t$  qui correspond à un aller-retour robot-cible. Le robot calcule alors la distance  $d_m$  en faisant  $d_m = \frac{c(\theta_{ref})}{\Delta t}$ . Pour  $\theta > \theta_{ref}$  la vitesse  $c(\theta_{ref})$  est inférieure à la vitesse réelle donc la distance  $d_m$  mesurée est plus petite que la distance réelle d'où  $e = d_m - d_r < 0$ . C'est l'inverse pour  $\theta < \theta_{ref}$  puisque  $c(\theta) < c(\theta_{ref})$  dans ce cas.

Le calcul de  $e$  se fait en multipliant  $d$  par 100.  $d$  est en mètre donc  $e$  est en centième de mètre soit en  $cm$ .

14. Sur la courbe on lit pour  $d_r = 1,5 \text{ m}$  et  $\theta_4 = 30^0 C$ ,  $e = -2,5 \text{ cm}$ . Ce qui fait un écart absolu de 1,7 %, l'erreur commise en négligeant les variations de température n'est donc pas très importante.

## II. Partie II: Réflexion de l'onde ultrasonore

1. L'onde incidente est une  $OPPH^+$  dans le milieu 1 soit  $v_i = \frac{p_i}{Z_1}$ .

L'onde réfléchi est une  $OPPH^-$  dans le milieu 1 soit  $v_r = -\frac{p_r}{Z_1}$ .

L'onde transmise est une  $OPPH^+$  dans le milieu 2 soit  $v_t = \frac{p_t}{Z_2}$ .

2. La surpression à l'interface est continue, elle a la même valeur sur l'interface dans l'air et dans le solide, c'est-à-dire que  $p(x = 0^-, t) = p(x = 0^+, t)$  ou encore  $p_i(0, t) + p_r(0, t) = p_t(0, t)$  qui conduit à  $p_{i0} + p_{r0} = p_{t0}$ .

Le débit volumique est continue, ce que l'on traduit par  $S.v(x = 0^-, t) = S.v(x = 0^+, t)$ , or comme les sections sont identiques dans l'air et dans le solide, il en résulte la continuité des vitesses à l'interface soit  $v_i(0, t) + v_r(0, t) = v_t(0, t)$  ou encore  $\frac{p_{i0}}{Z_1} - \frac{p_{r0}}{Z_1} = \frac{p_{t0}}{Z_2}$ .

On doit donc résoudre le système:  $p_{i0} + p_{r0} = p_{t0}$  et  $p_{i0} - p_{r0} = \frac{Z_1}{Z_2} p_{t0}$ .

On fait la somme des équations:  $2p_{i0} = \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) p_{t0}$  soit  $p_{t0} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} p_{i0}$  et donc  $p_{r0} = p_{t0} - p_{i0} =$

$$\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} p_{i0}$$

3. On définit l'intensité acoustique par  $I_i = \langle p_i v_i \rangle = \frac{p_{i0}^2}{2Z_1}$  car la moyenne temporelle d'un  $\cos^2$  est 1/2.

$$\text{De même } I_r = \langle p_r v_r \rangle = -\frac{p_{r0}^2}{2Z_1} \text{ et } I_t = \langle p_t v_t \rangle = \frac{p_{t0}^2}{2Z_2}.$$

On en déduit le coefficient de réflexion en intensité par  $R = \frac{|I_r|}{I_i} = \frac{p_{r0}^2}{p_{i0}^2} = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right)^2$  et le coefficient de

$$\text{transmission en intensité par } T = \frac{|I_t|}{I_i} = \frac{p_{t0}^2 Z_1}{p_{i0}^2 Z_2} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2}.$$

4. La relation traduit la conservation de l'énergie: l'énergie de l'onde incidente se répartit dans l'onde réfléchie et dans l'onde transmise.

5. On observe sur la courbe, que le coefficient de transmission vaut 1 (donc il n'y a pas de réflexion) pour  $Z_1 = Z_2$ . Et plus les impédances des milieux sont différentes, plus le coefficient de transmission est faible, c'est à dire plus le coefficient de réflexion est élevé et se rapproche de 1. On en déduit donc en lisant le tableau, que le robot détectera le moins le polystyrène expansé ( $6,0 \cdot 10^3 SI$  est la valeur de  $Z_2$  la plus proche de  $Z_1 = 4,2 \cdot 10^2 SI$ ). Pour ce milieu, on a  $\frac{Z_2}{Z_1} = 14,3$ , on lit sur la courbe que dans ce cas,  $T$  est voisin de 0,3 et donc  $R$  voisin de 0,7.

Dans une maison, les matériaux usuels (être humain, bois, verre, béton) sont tels que  $Z_2$  de l'ordre de  $10^6 SI$  donc  $\frac{Z_2}{Z_1}$  est voisin de 2000, pour de telles valeurs on lit  $T = 0$  et donc  $R = 1$ , l'onde incidente est donc totalement réfléchie.

6.  $v_i$  et  $v_r$  vérifient l'équation de d'Alembert de la forme  $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_i}{\partial t^2} = 0$ . Les relations de dispersion sont donc  $k_i = \frac{\omega_i}{c}$  et  $k_r = \frac{\omega_r}{c}$ .

7. La particule fluide a une vitesse nulle sur l'interface dans le référentiel du laboratoire donc  $v(x = -Vt, t) = 0$  ou encore  $v_{i0} \cos(\omega_i t + k_i vt) + v_{r0} \cos(\omega_r t - k_r vt) = 0$  à chaque instant  $t$  ou encore  $v_{i0} \cos((\omega_i + k_i v)t) + v_{r0} \cos((\omega_r - k_r v)t) = 0$ . Cela impose que dans les cosinus les termes sont identiques soit  $\omega_i + k_i v = \omega_r - k_r v$ .

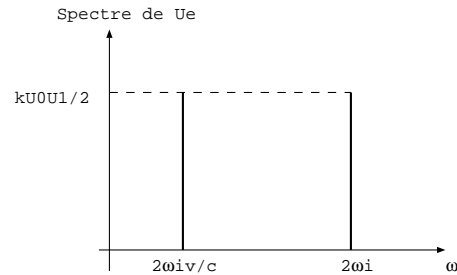
8. En utilisant les relations de dispersion on a  $\omega_i(1 + \frac{v}{c}) = \omega_r(1 - \frac{v}{c})$  ce qui conduit à  $\omega_r = \omega_i \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}$ .

9. Pour  $v = 3,6 \text{ km/h} = 1 \text{ m.s}^{-1} \ll c$ , on va donc procéder à un développement limité à l'ordre 1 en infiniment petit  $\frac{v}{c}$ . On a dans ce cas  $\frac{1}{1 - \frac{v}{c}} = (1 - \frac{v}{c})^{-1} \approx 1 + \frac{v}{c}$ . Ainsi on a aussi  $\omega_r \approx \omega_0(1 + \frac{v}{c})^2 \approx \omega_0(1 + \frac{2v}{c})$  en ne gardant que les termes d'ordre 1 en infiniment petit  $\frac{v}{c}$ .

10.

$$\begin{aligned} \text{On a } U_e(t) &= kU_i(t)U_r(t) = kU_0U_1 \cos(\omega_i t) \cos(\omega_r t + \phi) \\ &= \frac{kU_0U_1}{2} (\cos((\omega_i + \omega_r)t + \phi) + \cos((\omega_i - \omega_r)t - \phi)) = \\ &= \frac{kU_1U_0}{2} (\cos((2\omega_i + \frac{\omega_i 2v}{c})t + \phi) + \cos(-\frac{\omega_i 2v}{c}t - \phi)). \end{aligned}$$

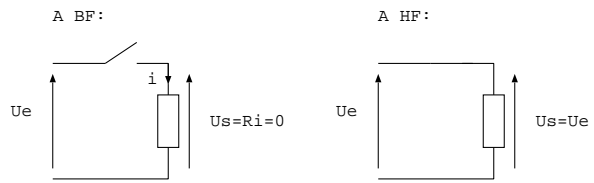
Le spectre comprend deux pulsations  $2\frac{\omega_i 2v}{c}$  et  $2\omega_i + \frac{\omega_i 2v}{c} \approx 2\omega_i$



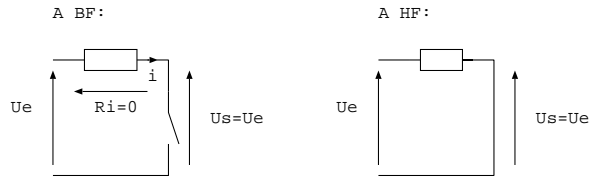
11. AN :  $\omega_i + \omega_r \approx 2\omega_i \approx 2,5 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$  et  $|\omega_i - \omega_r| = \frac{2\omega_i V}{c} = 1500 \text{ rad/s}$ .

On désire conserver uniquement la composante  $|\omega_0 - \omega_r|$  car elle est proportionnelle à la vitesse de l'objet, la mesure de cette pulsation peut donc permettre de trouver  $V$ . Pour cela, il faut utiliser un filtre passe-bas dont la pulsation de coupure est compris entre  $1500 \text{ rad/s}$  et  $2,5 \cdot 10^5 \text{ rad/s}$ , une valeur éloignée le plus possible de ces deux valeurs.

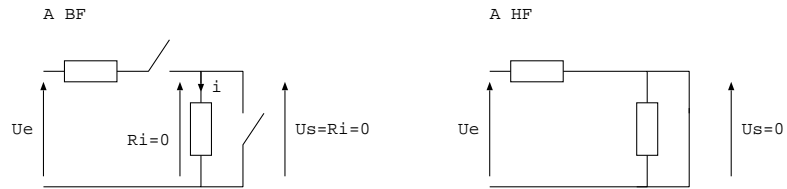
12. Le filtre 1 coupe les BF et laisse passer les HF c'est un filtre passe-haut.



Le filtre 2 coupe les HF et laisse passer les BF c'est un filtre passe-bas.



Le filtre 3 coupe les HF et les BF c'est un filtre passe-bande.



C'est donc le filtre 2 que nous allons utiliser.