

TD ondes sonores dans les fluides

I. Utilisation des impédances acoustiques

Pour les ondes sonores dans les fluides, la relation de dispersion s'écrit $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$, de même $k_2 = \frac{\omega}{c_2}$ et $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$.

On utilise $Z = \frac{p}{v} = \pm \rho c$ soit $+$ pour une $OPPP^+$ et $-$ pour une $OPPP^-$.

Pour $x < 0$: $v_0(x, t) = A_0 \cos(\omega t - k_0 x)$ on reconnaît une $OPPP^+$ on a donc $p_0 = +\rho_0 c_0 v_0 = \rho_0 c_0 A_0 \cos(\omega t - k_0 x)$

Pour $0 < x < l$: Le terme $A_1 \cos(\omega t - k_1 x)$ correspond à une $OPPP^+$ soit la surpression associée $\rho_1 c_1 A_1 \cos(\omega t - k_1 x)$ et le terme $B_1 \cos(\omega t + k_1 x)$ correspond à une $OPPP^-$ soit la surpression associée $-\rho_1 c_1 B_1 \cos(\omega t + k_1 x)$.

On a donc $p_1(x, t) = +\rho_1 c_1 A_1 \cos(\omega t - k_1 x) - \rho_1 c_1 B_1 \cos(\omega t + k_1 x)$

Pour $x > l$: $v_2(x, t) = A_2 \cos(\omega t - k_2 x)$ est une $OPPP^+$ donc la surpression est $p_2(x, t) = +\rho_2 c_2 v_2 = \rho_2 c_2 A_2 \cos(\omega t - k_2 x)$

On écrit la continuité de la surpression et de la vitesse particulaire en $x = 0$:

$$v_0(x = 0, t) = v_1(x = 0, t) \text{ donne } A_0 = A_1 + B_1$$

$$p_0(x = 0, t) = p_1(x = 0, t) \text{ donne } \rho_0 c_0 A_0 = \rho_1 c_1 (A_1 - B_1)$$

On écrit la continuité de la surpression et de la vitesse particulaire en $x = l$:

$$v_1(x = l, t) = v_2(x = l, t) \text{ donne } A_1 \cos(\omega t - k_1 l) + B_1 \cos(\omega t + k_1 l) = A_2 \cos(\omega t - k_2 l)$$

$$p_1(x = l, t) = p_2(x = l, t) \text{ donne } \rho_1 c_1 (A_1 \cos(\omega t - k_1 l) - B_1 \cos(\omega t + k_1 l)) = \rho_2 c_2 A_2 \cos(\omega t - k_2 l).$$

II. Equation de propagation

On étudie la propagation d'une onde sonore. On note $p(x, t) = P(x, t) - P_0$ (la surpression), $\xi(x, t)$ (le déplacement de la tranche de fluide en x à l'instant t) et $\mu(x, t) = \rho(x, t) - \rho_0$ (l'écart de la masse volumique par rapport à sa valeur ρ_0 à l'équilibre).

1. L'approximation acoustique consiste à supposer que p , v , ξ et μ sont des infiniment petits d'ordre 1, on fait des DL à l'ordre 1 pour linéariser les équations.

2. L'équation d'Euler s'écrit: $\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad} P$

Le terme convectif $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$ est d'ordre 2 donc on le néglige.

$$\text{On a } (\rho_0 + \mu) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (P_0 + p(x, t)) \vec{e}_x$$

Le terme $\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est d'ordre 2 donc on le néglige.

$$\text{Il reste donc en projection sur } Ox \quad \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

3. Son volume sans onde est: $V_0 = S dx$

$$\text{Son volume avec onde est: } V = S(x + dx + \xi(x + dx, t) - x - \xi(x, t)) = S dx \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right).$$

$$\text{On a donc la variation relative de volume: } \frac{V - V_0}{V} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\text{Le coefficient de compressibilité isentropique s'écrit: } \chi_S = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{1}{V_0} \frac{V - V_0}{P - P_0} = -\frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}}{p}.$$

$$4. \text{ On a } \frac{\partial \xi}{\partial x} = -p \chi_S \text{ soit } \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\chi_S \frac{\partial p}{\partial x} = +\chi_S \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

$$\text{On a donc } \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \chi_S \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0: \text{ c'est une équation de d'Alembert avec } c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}.$$

III. Suppression dans un tuyau d'orgue

1. Les variables t et x ne sont pas dans le même terme, il s'agit donc d'une OS. Ce choix est justifié par le fait que les ondes se propagent dans un espace de taille finie.

2. L'équation d'Euler s'écrit $\rho(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_1) = -\nabla P$

Le terme convectif $(\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_1$ est d'ordre 2 donc on le néglige.

On a $(\rho_0 + \rho_1) \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(P_0 + p_1(x, t)) \vec{e}_x$

Le terme $\rho_1 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$ est d'ordre 2 donc on le néglige.

Il reste donc en projection sur Ox $\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}$.

On a $\frac{\partial p_1}{\partial x} = -k p_m \cos(\omega t) \sin(kx + \phi)$.

Soit $\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{k p_m}{\rho_0} \cos(\omega t) \sin(kx + \phi)$

et en intégrant par rapport à t (la constante d'intégration est nulle car les constantes ne se propagent pas):

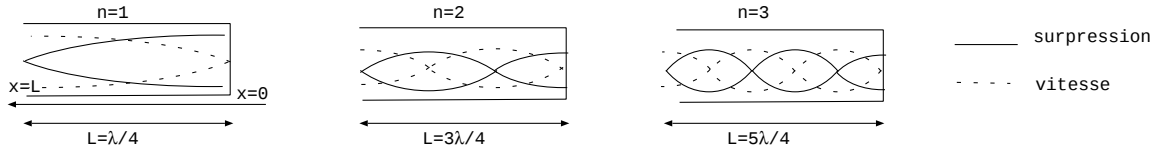
$$v_1 = \frac{k p_m}{\omega \rho_0} \sin(\omega t) \sin(kx + \phi) = \frac{p_m}{c \rho_0} \sin(\omega t) \sin(kx + \phi) \text{ car } k = \frac{\omega}{c}.$$

3. Le tuyau est fermé en $x = 0$ donc la vitesse est nulle soit $v_1(x = 0, t) = 0 = \frac{p_m}{c \rho_0} \sin(\omega t) \sin(\phi)$ soit $\phi = 0$.

Le tuyau est ouvert en $x = L$ donc la surpression est nulle soit $p_1(x, t) = p_m \cos(\omega t) \cos(kL) = 0$ soit $\cos(kL) = 0$ donc $k_n L = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ou encore $k_n = \frac{\pi}{2L}(2n + 1)$ avec $n \geq 0$.

On a $k_n = \frac{2\pi f_n}{c}$ d'où les fréquences propres du tuyau $f_n = \frac{k_n c}{2\pi} = \frac{c}{4L}(2n + 1)$.

Pour les schémas, en $x = 0$ on a un noeud de vitesse et un ventre de surpression, en $x = L$, on a un noeud de surpression et un ventre de vitesse:



Relation de récurrence: $L = \frac{(2n + 1)\lambda_n}{4}$ soit $f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c}{4L}(2n + 1)$.

4. La fréquence du fondamental est $f_0 = \frac{c}{4L} = 142 \text{ Hz}$.

On a $v_1 = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{p_m}{c \rho_0} \sin(\omega t) \sin(kx + \phi)$.

On intègre par rapport au temps (constante d'intégration nulle car les constantes ne se propagent pas):

$$\xi = -\frac{p_m}{\omega c \rho_0} \cos(\omega t) \sin(kx + \phi). \text{ On a donc } \xi_m = \frac{p_m}{\omega c \rho_0} = \frac{p_m}{2\pi f_0 c \rho_0}.$$

On en déduit $p_m = 2\pi f_0 c \rho_0 \xi_m = 157 \text{ Pa}$.

La vitesse particulière s'écrit $v_1 = \frac{p_m}{c \rho_0} \sin(\omega t) \sin(kx + \phi)$ donc son amplitude est $v_m = \frac{p_m}{c \rho_0} = 0,35 \text{ m/s}$.

On constate que la surpression et la vitesse particulière sont bien des infiniment petits d'ordre 1 ($p_m \ll P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ et $v_m \ll c = 340 \text{ m/s}$).

IV. Notation complexe

L'équation d'Euler s'écrit: $\rho(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}) = -\text{grad} P$

Le terme convectif $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$ est d'ordre 2 donc on le néglige.

On a $(\rho_0 + \mu) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (P_0 + p(x, t)) \vec{e}_x$

Le terme $\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ est d'ordre 2 donc on le néglige.

Il reste donc en projection sur Ox : $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}$.

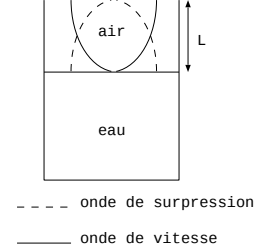
En notation complexe: $\rho_0 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ devient $\rho_0 j \omega \underline{v} = -(-jk) \underline{p}$ soit $\underline{Z} = \frac{\underline{p}}{\underline{v}} = +\rho_0 \frac{\omega}{k} = \rho_0 c$.

V. Verre d'eau chanteur

Il se forme une OS dans la colonne d'air dans le verre avec un noeud de surpression soit un ventre de vitesse en haut du verre et un noeud de vitesse soit un ventre de surpression au niveau de l'interface air-eau.

On a donc $L = \frac{\lambda}{4}$ pour le mode fondamental soit $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{4L} = \frac{340}{4.0,048} = 1770 \text{ Hz}$.

On utilise la relation $f' = \frac{c}{4L'}$ avec $f' = 2f = 3540 \text{ Hz}$ soit $L' = \frac{L}{2} = 24 \text{ mm}$.

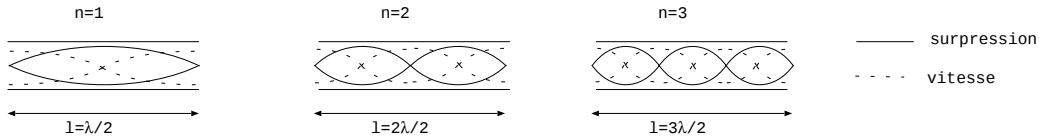


VI. Tuyau sonore

On lit $3T = 6,8 \text{ ms}$ soit $T \approx 2,3 \text{ ms}$ soit une fréquence $f = 435 \text{ Hz}$.

La vitesse du son dans un GP s'écrit $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = 307 \text{ m.s}^{-1}$.

Dans le tuyau ouvert aux deux extrémités se forme une OS avec des noeuds de surpression et des ventres de vitesse aux deux extrémités.



On a la relation de récurrence $L = n \frac{\lambda_n}{2}$ avec $n \geq 1$.

On en déduit les fréquences propres $f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2L}$.

Le mode fondamental est pour $n = 1$ soit $f_1 = \frac{c}{2L} = 435 \text{ Hz}$ soit $L = \frac{c}{2f_1} = 35,3 \text{ cm}$.

Le spectre comprend des pics aux fréquences $f_1, 2f_1, 3f_1 \dots$

VII. Propagation dans un tuyau de section variable

1. On applique $Z = \frac{p}{v} = +\rho_0 c$ pour une $OPPH^+$ et $Z = \frac{p}{v} = -\rho_0 c$ pour une $OPPH^-$

$v_i = v_0 \cos(\omega t - kx)$ et $p_i = \rho_0 c v_0 \cos(\omega t - kx)$

$v_r = r v_0 \cos(\omega t + kx)$ et $p_r = -\rho_0 c r v_0 \cos(\omega t + kx)$

$v_t = \tau v_0 \cos(\omega t - kx)$ et $p_t = \rho_0 c \tau v_0 \cos(\omega t - kx)$

2. On écrit la continuité de la surpression en $x = 0$: $p_i(x = 0, t) + p_r(x = 0, t) = p_t(x = 0, t)$ qui donne après simplification par $\rho_0 c \cos(\omega t)$: $1 - r = \tau$.

On écrit la continuité du débit volumique en $x = 0$: $S_1 v_i(x = 0, t) + S_1 v_r(x = 0, t) = S_2 v_t(x = 0, t)$ qui donne après simplification par $\cos(\omega t)$: $S_1(1 + r) = S_2 \tau$.

On résout le système $1 - r = \tau$ et $1 + r = \frac{S_2}{S_1} \tau$.

On fait la somme: $2 = (1 + \frac{S_2}{S_1}) \tau$ soit $\tau = \frac{2S_1}{S_2 + S_1}$.

On en déduit r par $r = 1 - \tau = 1 - \frac{2S_1}{S_2 + S_1} = \frac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1}$. Le coefficient r peut être négatif, ce qui traduit que les ondes incidente et réfléchie peuvent être en opposition de phase. Et $|r| \leq 1$ donc l'onde réfléchie est toujours d'amplitude plus petite que l'onde incidente.

3. Pour $S_1 \ll S_2$ on a $S_1 + S_2 \approx S_2$ d'où $r = 1$ et $\tau = 0$: il n'y a pas d'onde transmise.

On a $v(x < 0, t) = v_i + v_r = v_0 \cos(\omega t - kx) + v_0 \cos(\omega t + kx) = 2v_0 \cos(\omega t) \cos(kx)$: c'est une OS avec en $x = 0$ un ventre de vitesse, ce qui est en accord avec le fait qu'en $x = 0$ il y a une ouverture.

On a $p(x < 0, t) = p_i + p_r = \rho_0 c v_0 (\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)) = 2v_0 \rho_0 c \sin(\omega t) \sin(kx)$: c'est une OS avec en $x = 0$ un noeud de surpression, ce qui est en accord avec le fait qu'en $x = 0$ il y a une ouverture.

4. $I_i = \langle p_i v_i \rangle = \langle \rho_0 c v_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{\rho_0 c v_0^2}{2} > 0$: l'onde se propage selon $+Ox$.

$I_r = \langle p_r v_r \rangle = \langle -\rho_0 c r^2 v_0^2 \cos^2(\omega t + kx) \rangle = -\frac{\rho_0 c r^2 v_0^2}{2} < 0$: l'onde se propage selon $-Ox$.

$I_t = \langle p_t v_t \rangle = \langle \rho_0 c \tau^2 v_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{\rho_0 c \tau^2 v_0^2}{2} > 0$: l'onde se propage selon $+Ox$.

On a donc $R = \frac{S_1 |I_r|}{S_1 I_i} = r^2 = (\frac{S_2 - S_1}{S_2 + S_1})^2$.

On a aussi $T = \frac{S_2 |I_t|}{S_1 I_i} = \tau^2 = \frac{4S_1 S_2}{(S_2 + S_1)^2}$.

On a la relation $R + T = 1$ qui s'écrit aussi $P_r + P_t = P_i$ qui signifie que l'énergie de l'onde incidente se répartit dans l'onde réfléchie et l'onde transmise, cette relation traduit la conservation de l'énergie.

Remarque: $R = 0,4$ veut dire que 40 % de l'énergie de l'onde incidente est réfléchie.

5. Pour $S_1 = S_2$: $R = 0$: il n'y a pas d'onde réfléchie puisqu'il n'y a pas de changement de section.

Pour $S_1 \ll S_2$ et $S_2 \gg S_1$: on a $T = 0$: il n'y a pas d'onde transmise, l'onde est totalement réfléchie et il se forme dans le tuyau une OS.

6. Sans pavillon dans la trompette ou dans l'oreille, le son ne sortirait pas du conduit.

VIII. Discontinuité entre deux milieux

1. On applique $Z = \frac{p}{v} = +\rho_0 c$ pour une $OPPH^+$ et $Z = \frac{p}{v} = -\rho_0 c$ pour une $OPPH^-$

$p_i = p_0 \cos(\omega t - k_1 x)$ et $v_i = \frac{p_0}{\rho_1 c_1} \cos(\omega t - k_1 x)$

$p_r = r p_0 \cos(\omega t + k_1 x)$ et $v_r = -\frac{r p_0}{\rho_1 c_1} v_0 \cos(\omega t + k_1 x)$

$p_t = \tau p_0 \cos(\omega t - k_2 x)$ et $v_t = \frac{\tau p_0}{\rho_1 c_1} v_0 \cos(\omega t - k_2 x)$.

$I_i = \langle p_i v_i \rangle = \langle \frac{p_0^2}{\rho_1 c_1} \cos^2(\omega t - k_1 x) \rangle = \frac{p_0^2}{2\rho_1 c_1} > 0$: l'onde se propage selon $+Ox$.

$I_r = \langle p_r v_r \rangle = \langle -\frac{r^2 p_0^2}{\rho_1 c_1} \cos^2(\omega t + k_1 x) \rangle = -\frac{r^2 p_0^2}{2\rho_1 c_1} < 0$: l'onde se propage selon $-Ox$.

$I_t = \langle p_t v_t \rangle = \langle \frac{\tau^2 p_0^2}{\rho_2 c_2} \cos^2(\omega t - k_2 x) \rangle = \frac{\tau^2 p_0^2}{2\rho_2 c_2} > 0$: l'onde se propage selon $+Ox$.

2. On écrit la continuité de la surpression en $x = 0$: $p_i(x = 0, t) + p_r(x = 0, t) = p_t(x = 0, t)$ qui donne après simplification par $p_0 \cos(\omega t)$: $1 + r = \tau$.

On écrit la continuité du débit volumique en $x = 0$ (ici c'est la continuité de la vitesse particulière puisque les sections sont les mêmes des deux côtés): $v_i(x = 0, t) + v_r(x = 0, t) = v_t(x = 0, t)$ qui donne après

simplification par $p_0 \cos(\omega t)$: $\frac{1-r}{\rho_1 c_1} = \frac{\tau}{\rho_2 c_2}$.

On résout le système $1+r = \tau$ et $1-r = \frac{\tau}{\alpha}$.

On fait la somme: $2 = (1 + \frac{1}{\alpha})\tau$ soit $\tau = \frac{2\alpha}{1+\alpha}$.

On en déduit $r = \tau - 1 = \frac{2\alpha}{1+\alpha} - 1 = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$: Le coefficient r peut être négatif, ce qui traduit que les ondes incidente et réfléchie peuvent être en opposition de phase. Et $|r| \leq 1$ donc l'onde réfléchie est toujours d'amplitude plus petite que l'onde incidente.

3. On a $R = r^2 = (\frac{\alpha-1}{\alpha+1})^2$ et $T = \tau^2 = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$.

On a la relation $R + T = 1$ qui s'écrit aussi $P_r + P_t = P_i$ qui signifie que l'énergie de l'onde incidente se répartit dans l'onde réfléchie et l'onde transmise, cette relation traduit la conservation de l'énergie.

Remarque: $R = 0,6$ et $T = 0,4$ veut dire que 60 % de l'énergie de l'onde incidente est réfléchie et 40 % de l'énergie de l'onde incidente est transmise.

4. Pour l'air: $\rho_1 \approx 1 \text{ kg.m}^{-3}$ et $c_1 = 340 \text{ m.s}^{-1}$.

Pour l'eau: $\rho_2 \approx 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et $c_2 = 1400 \text{ m.s}^{-1}$.

AN: $\alpha = 4,1.10^3$ soit $R = 1$ et $T = 10^{-3}$ et $T_{dB} = 10 \log T = -30 \text{ dB}$. L'onde sonore ne rentre pas de l'air dans l'eau.

5. On trouve aussi $R = 1$ et $T \approx 0$, d'où pour l'échographie, le rôle du gel pour que l'onde émise passe de l'air jusque dans le muscle.

IX. Isolation phonique

1. Pour une $OPPH^+$: $\frac{p}{v} = +\rho_0 c$ et pour une $OPPH^-$: $\frac{p}{v} = -\rho_0 c$

D'où $\underline{p}_i = \rho_0 c \underline{v}_i$, $\underline{p}_r = -\rho_0 c \underline{v}_r$ et $\underline{p}_t = \rho_0 c \underline{v}_t$.

Ainsi pour $x < 0$, l'onde de vitesse est $\underline{v}_i + \underline{v}_r = A e^{j(\omega t - kx)} + \underline{B} e^{j(\omega t + kx)}$ et l'onde de pression est $\underline{p}_i + \underline{p}_r = \rho_0 c (A e^{j(\omega t - kx)} - \underline{B} e^{j(\omega t + kx)})$

Pour $x > e$, l'onde de vitesse est $\underline{v}_t = \underline{D} e^{j(\omega t - kx)}$ et l'onde de pression est $\underline{p}_t = \rho_0 c \underline{D} e^{j(\omega t - kx)}$.

2. La vitre est solide donc la vitesse de la vitre (soit la vitesse des particules fluide) en $x = 0$ est la même que celle en $x = e$ soit:

$$\underline{v}_i(x=0) + \underline{v}_r(x=0) = \underline{v}_t(x=e) \text{ d'où } A + \underline{B} = \underline{D}.$$

3. L'accélération de la vitre est égale à l'accélération des particules fluide en $x = 0$ ou en $x = e$ soit:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\underline{v}_i(x=0) + \underline{v}_r(x=0))\vec{e}_x = j\omega(A + \underline{B})e^{j\omega t}\vec{e}_x$$

$$\text{ou } \vec{a} = \frac{d}{dt}(\underline{v}_t(x=e))\vec{e}_x = j\omega \underline{D} e^{j\omega t}\vec{e}_x$$

4. On applique la RFD à la vitre de masse $m = \rho_v S e$ qui subit les forces de pression:

$$-\vec{F}_g = +P(x=0)S\vec{e}_x = +(P_0 + \underline{p}_i(x=0) + \underline{p}_r(x=0))S\vec{e}_x = (P_0 + \rho_0 c(A - \underline{B})e^{j\omega t})S\vec{e}_x$$

$$-\vec{F}_d = -P(x=e)S\vec{e}_x = -(P_0 + \underline{p}_t(x=e))S\vec{e}_x = -(P_0 + \rho_0 c \underline{D} e^{j\omega t})S\vec{e}_x$$

$$\text{On a donc } \rho_v S e j\omega \underline{D} e^{j\omega t} = +(P_0 + \rho_0 c(A - \underline{B})e^{j\omega t})S - (P_0 + \rho_0 c \underline{D} e^{j\omega t})S$$

soit $\rho_v e j\omega \underline{D} = \rho_0 c(A - \underline{B} - \underline{D}) = 2\rho_0 c(A - \underline{D})$. On a donc $\frac{\underline{D}}{A} = \frac{1}{1 + \frac{j\omega \rho_v e}{2\rho_0 c}}$ (ce rapport est appelé coefficient de transmission, c'est l'amplitude de l'onde transmise sur l'amplitude de l'onde incidente).

5. On en déduit $T = |\frac{\underline{B}}{A}| = \frac{1}{1 + (\frac{\omega \rho_v e}{2\rho_0 c})^2}$.

A BF: $T \approx 1$: ce filtre laisse passer les BF

A HF: $T \approx \frac{1}{(\frac{\omega \rho_v e}{2\rho_0 c})^2} \approx 0$: ce filtre coupe les HF

La vitre se comporte comme un filtre passe bas (les sons graves traversent la vitre alors que les sons aigus ne traversent pas).