Chapitre EM 2 : conduction électrique

Les différents phénomènes de conduction (ou de diffusion) connus sont:

Inhomogénéités	Quantité transportée	Loi de diffusion	Unités	Flux
Température	transfert thermique	$\vec{j}_Q = -\lambda \, \vec{\text{grad}}\, T$ loi de Fourier	$[j_Q] = J.m^{-2}s^{-1}$ ou $W m^{-2}$ $[T] = K$ $[\lambda] = \frac{W m^{-2}}{K m^{-1}} = W K^{-1} m^{-1}$	$\iint \vec{j}_Q \, dS \, \vec{n}$ est la puissance thermique qui traverse une surface
Concentration	particules	$\vec{j}_D = -D \, \vec{\text{grad}}\, n$ loi de Fick	$[j_D] =$ particules $m^{-2}s^{-1}$ $[n] =$ particules m^{-3} $[D] = m^2 s^{-1}$	$\iint \vec{j}_D \, dS \, \vec{n}$ est le nbre de particules qui traverse une surface / unité de temps
Potentiel	charges	$\vec{j} = -\gamma \, \vec{\text{grad}}\, V$ loi d'Ohm	$[j] = C m^{-2} s^{-1}$ ou $A m^{-2}$ $[V] = V$ $[\gamma] = \frac{A m^{-2}}{V m^{-1}} = S m^{-1}$	$\iint \vec{j} \, dS \, \vec{n}$ est la charge qui traverse une surface / unité de temps : c'est l'intensité

I. Le courant électrique

Le courant électrique est le mouvement d'ensemble de charges sous l'action d'une ddp (ou d'un champ $\vec{E}$ extérieur)

1. Les grandeurs physiques

Dans un conducteur, il y a des porteurs de charge mobiles caractérisés par:

q: charge d'un porteur $\quad [q] = C$

$\vec{v}$: vitesse d'un porteur $\quad [v] = m s^{-1}$

n^*: nbre de porteurs par unité de volume $\quad [n^*] =$ particules m^{-3}

ρ_m: densité volumique de charges $\quad [\rho_m] = C m^{-3}$

Le mouvement d'ensemble des porteurs de charges crée un courant électrique caractérisé par:

$\vec{j}$: vecteur densité de courant $\quad [j] = C m^{-2} s^{-1} = A m^{-2}$

I: intensité $\quad I = \frac{dq}{dt} \quad [I] = A = C s^{-1}$

Relations entre ces grandeurs:

$\boxed{\rho_m = n^* q}$ (signe de ρ_m est le signe de q)

$\boxed{\vec{j} = n^* q \vec{v} = \rho_m \vec{v}}$

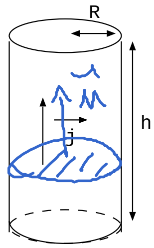
$\vec{j}$ et $\vec{v}$ de même sens pour $q > 0$
de sens contraire pour $q < 0$

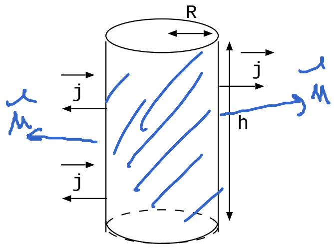
L'intensité est le flux du vecteur densité de courant électrique à travers une surface orientée soit:

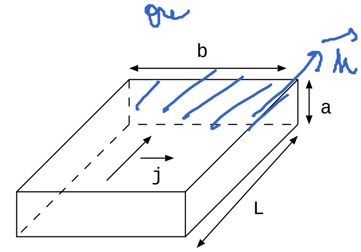
$I = \iint \vec{j} \cdot dS\,\vec{n} = + \iint j\,dS$ pour $\vec{j}$ et $\vec{n}$ de même sens

$= - \iint j\,dS$ " de sens contraire

$I = j \times S$ pour j uniforme







$I = j\pi R^2$ $\qquad$ $I = j\,2\pi R h$ $\qquad$ $I = j\,ab$

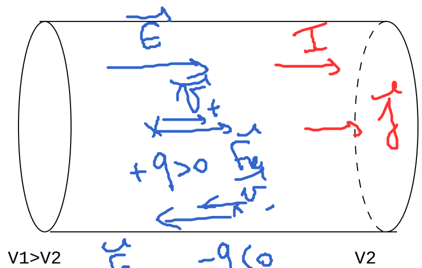
Schéma récapitulatif: on rappelle la convention: l'intensité du courant électrique est positive dans le sens du déplacement des charges positives.

$\vec{E}$ est dirigé des forts vers les faibles potentiels

$\vec{F}_e = q\vec{E}$: force électrique exercée sur les charges

$q>0$ les charges se déplacent dans le sens de $\vec{E}$

$q<0$ " dans le sens contraire à $\vec{E}$



$\vec{j} = \vec{j}_+ + \vec{j}_-$

$= n_+(q\vec{v}_+) - n_-(-q\vec{v}_-)$

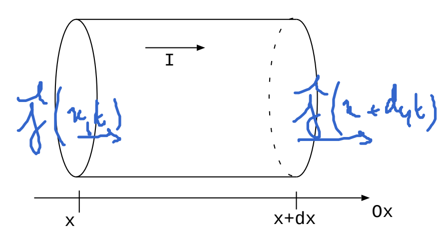
$\vec{j}$, I et $\vec{E}$ sont toujours de $\parallel$ même sens

2. Equation de conservation de la charge

On considère le système élémentaire de conducteur de section S compris entre x et $x + dx$.

On note $\rho_m(x,t)$: densité volumique de charges

On note $\vec{j}(x,t)$: vecteur densité de courant



Charge présente dans le système à l'instant t: $Q(t) = \rho_m(x,t)\,S\,dx$

Charge présente dans le système à l'instant $t + dt$: $Q(t+dt) = \rho_m(x,t+dt)\,S\,dx$

Charge qui entre dans le système entre t et $t + dt$: $\delta Q_e = j(x,t)\,S\,dt$

Charge qui sort dans le système entre t et $t + dt$: $\delta Q_s = j(x+dx,t)\,S\,dt$

La conservation de la charge s'écrit: $Q(t+dt) = Q(t) + \delta Q_e - \delta Q_s$

$[\rho_m(x,t+dt) - \rho_m(x,t)]\,S\,dx = -S\,dt\,[j(x+dx,t) - j(x,t)]$ donc $\dfrac{\partial \rho_m}{\partial t} + \dfrac{\partial j}{\partial x} = 0$

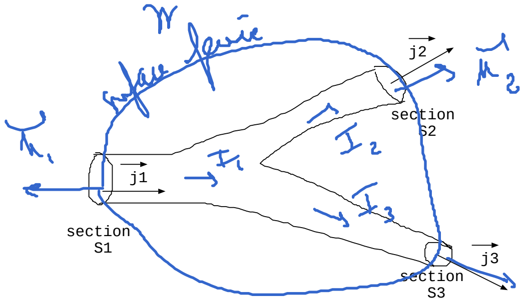
On généralise cette équation à 3 dimensions:

$$\frac{\partial j_x}{\partial x}+\frac{\partial j_y}{\partial y}+\frac{\partial j_z}{\partial z}+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathrm{div}\,\vec{j}+\frac{\partial \rho_m}{\partial t}=0}$$

Conséquence en régime stationnaire:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t}=0 \rightarrow \mathrm{div}\,\vec{j}=0$$

Th. d'Ostrogradsky : $\oiint \vec{j}(M)\,dS(M)\,\vec{n}(M) = \iiint \mathrm{div}\,\vec{j}(P)\,d\tau = 0$



$$\iint \vec{j}_1\,dS_1\,\vec{n}_1 + \iint \vec{j}_2\,dS_2\,\vec{n}_2 + \iint \vec{j}_3\,dS_3\,\vec{n}_3 = 0$$

$$-I_1+I_2+I_3=0$$

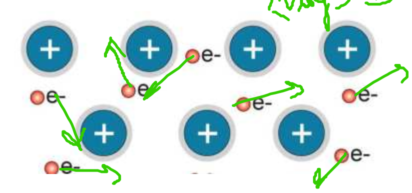
On retrouve la loi des noeuds

II. Conducteur ohmique

1. Modèle de Drüde (1900)

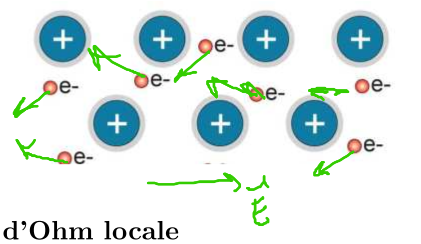
Dans un conducteur métallique, chaque atome possède au moins un électron de conduction, dit électron libre car il n'est pas lié au noyau. Le métal est donc composé de cations fixes disposés aux noeuds du réseau et d'électrons de conduction en mouvement incessant. Ces électrons subissent de nombreuses collisions entre eux et avec les cations du métal.

Cuivre : 1 e^- libre par atome + cations et e^-



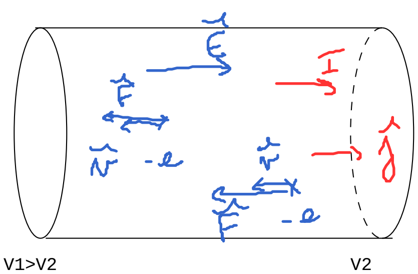
En absence de champ électrique extérieur, ces électrons ont un mouvement désordonné, aléatoire donc ils n'ont pas de mouvement d'ensemble. Le courant électrique est nul.

$\vec{v}_{moy}$ dans le sens opposé à $\vec{E}$



En présence d'un champ électrique extérieur, ces électrons subissent la force électrique. Ils se déplacent tous dans le sens opposé au champ électrique. Cela crée un mouvement d'ensemble appelé courant électrique.

2. Loi d'Ohm locale



La ddp crée un champ $\vec{E}$ des forts vers les faibles potentiels. Les électrons se déplacent dans le sens opposé à $\vec{v}$ sous l'action de $\vec{F}=-e\vec{E}$.

Il apparaît $\vec{j}$ et I dans le même sens que $\vec{E}$.

$\boxed{\vec{j}=\gamma\vec{E}}$: loi d'Ohm local où γ est la conductivité du matériau

Unité de la conductivité γ (notée aussi σ):

$[j] = A.m^{-2}$ $\quad [E] = V m^{-1}$ $\quad [\gamma] = \left[\frac{j}{E}\right] = \frac{A m^{-2}}{V m^{-1}} = S m^{-1}$

Remarque: On donne la relation entre le champ électrique et le potentiel: $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$.

$\boxed{\vec{j} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}}\, V}$ traduit que les courants sont dirigés des forts vers les faibles potentiels

3. Exercice

a- Le cuivre est un métal dans lequel chaque atome libère un électron de conduction. On donne la masse volumique du cuivre $\mu = 9.10^3\ kg/m^3$ et la masse molaire du cuivre $M = 64\ g/mol$. Calculer n^*, ρ_m et la vitesse moyenne des électrons dans un fil de section $S = 1\ mm^2$ parcouru par $I = 0,1\ A$. Données: $\mathcal{N}_a = 6.10^{23}\ mol^{-1}$ et $e = 1,6.10^{-19}\ C$.

Les électrons de conduction subissent des collisions entre eux et des collisions avec les cations. Ces collisions sont modélisées dans le modèle de Drüde par le force: $\overrightarrow{F} = -\frac{m}{\tau}\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse moyenne d'un électron.

b- Quelle est la dimension de la grandeur τ?

c- On néglige le poids des électrons. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $\overrightarrow{v}$. Déterminer la durée du régime transitoire et exprimer la vitesse limite atteinte par l'électron. En déduire l'expression de γ. AN : calculer τ pour le cuivre de conductivité $\gamma = 10^4\ SI$. Donnée: $m = 9.10^{-31}\ kg$.

a- Le nbre d'é de conduction est égal au nbre d'atomes

$n^* = \frac{N_{e^-}}{V} = \frac{N_{atomes}}{V} = \frac{m_{atomes} \times \mathcal{N}_a}{V} = \frac{m_{atome}\, \mathcal{N}_a}{M\, V} = \frac{\mu \mathcal{N}_a}{M}$ $\quad$ AN: $n^* = 8,4.10^{28}\ e^-.m^{-3}$

$\rho_m = -e n^*$ $\quad$ AN : $\rho_m = -1,35.10^{10}\ C m^{-3}$

$\vec{j} = \rho_m \vec{v}$ soit $v = \frac{\|\vec{j}\|}{|\rho_m|} = \frac{I}{|\rho_m| S}$ $\quad$ AN : $v = 7,4\ \mu m.s^{-1}$

b- τ est un temps, c'est le temps moyen entre 2 collisions subies par 1 e^-

c- RFD appliquée à un e^- : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - e\vec{E} - \frac{m\vec{v}}{\tau}$ soit $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{-e\vec{E}}{m}$

solution : $\vec{v} = \frac{-e\tau\vec{E}}{m} + \vec{A} e^{-t/\tau}$ $\quad$ τ : temps de relaxation

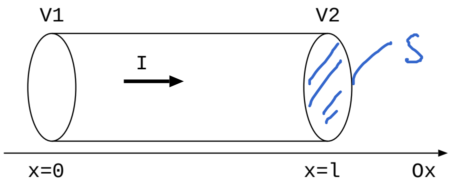
$\boxed{\vec{v}_l = \frac{-e\tau\vec{E}}{m}}$ vitesse limite des électrons

Or $\vec{j} = n^* \underbrace{q}_{-e} \vec{v}_l = +\frac{n^* e^2 \tau}{m}\vec{E}$ de la forme $\vec{j} = \gamma\vec{E}$: loi d'Ohm

d'où $\boxed{\gamma = \frac{n^* e^2 \tau}{m}}$ La conductivité est d'autant + grande que τ est grand (peu de collisions) et que le nbre d'e^- est élevé (n^* grand

AN : $\tau = \frac{m\gamma}{n^* e^2} = 4,3.10^{-18}\ s$

4. Loi d'Ohm intégrale



loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

avec $\vec{j} = \frac{I}{S}\vec{e}_x$

avec $\vec{E} = \frac{V_1 - V_2}{l}\vec{e}_x$

d'où $\frac{I}{S} = \frac{\gamma(V_1 - V_2)}{l}$ soit $U = V_1 - V_2 = \frac{l}{\gamma S} I = RI$ avec $\boxed{R = \frac{l}{\gamma S}}$

La résistance mesure l'opposition au passage du courant

Elle est d'autant + grande que la conductivité est faible, et que le fil est de petite section

5. Loi de Joule locale

Une particule de charge q soumise au champ électrique $\vec{E}$ subit la force: $\vec{F} = q\vec{E}$

Cette force exerce sur la charge la puissance: $\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{v} = q\vec{E}\cdot\vec{v}$

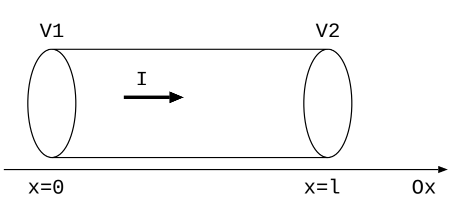
Un volume $d\tau$ de conducteur contient N charges q: $N = n^* d\tau$

Les charges contenues dans ce volume $d\tau$ reçoivent donc de la part du champ électrique, la puissance:

$$d\mathcal{P} = N\mathcal{P} = n^* d\tau\, q\vec{E}\cdot\vec{v} = n^* q\vec{v}\cdot\vec{E}\, d\tau = \vec{j}\cdot\vec{E}\, d\tau$$

A retenir: $\boxed{\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j}\cdot\vec{E}}$ puissance volumique cédée aux charges par le champ $\vec{E}$ pour les mettre en m^{vt}

Soit un conducteur filiforme de section S, de longueur l et de conductivité γ. Ce conducteur est parcouru par un courant d'intensité I créé par l'application d'un champ électrique $\vec{E}$. Exprimer la puissance reçue par le conducteur de la part du champ électrique et préciser ce que devient cette puissance.



$$\mathcal{P} = \iiint \vec{j}\cdot\vec{E}\, d\tau \quad \text{avec } \vec{j} = \frac{I}{S}\vec{e}_x = \gamma\vec{E}$$

$$= \iiint \frac{j^2}{\gamma}\, d\tau = \frac{I^2}{\gamma S^2}\underbrace{\iiint d\tau}_{= Sl} = \frac{l I^2}{\gamma S} = RI^2$$

Toute la puissance cédée par le champ $\vec{E}$ aux charges pour les mettre en mouvement est dissipée sous forme de chaleur : <u>effet Joule</u>

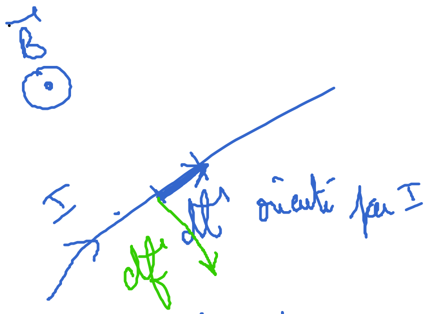
III. Action d'un champ magnétique sur un courant électrique

1. Force de Laplace

Une particule de charge q, animée d'une vitesse $\overrightarrow{v}$ et placée dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$, subit la force:

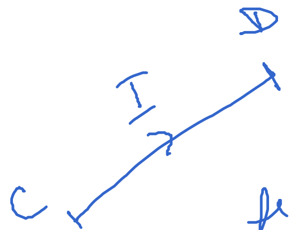
$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Un élément de longueur $\overrightarrow{dl}$ parcouru par un courant électrique d'intensité I et placé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ subit la force:



$$\vec{df} = I\,\vec{dl} \wedge \vec{B}$$

Un segment CD parcouru par un courant I et placé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ uniforme subit la force:



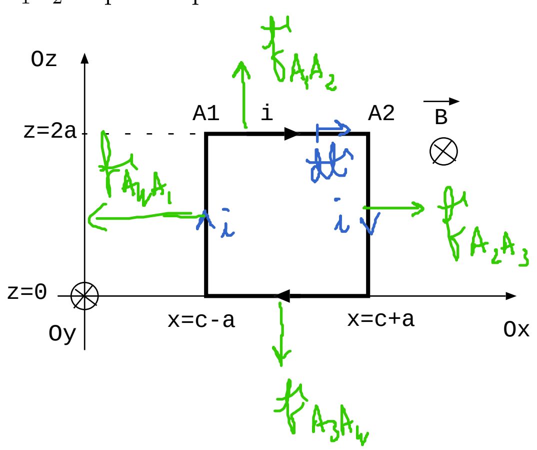
$$\vec{f} = \int_C^D I\,\vec{dl} \wedge \vec{B}$$

for I et $\vec{B}$ uniforme

$$\vec{f} = I \int_C^D \vec{dl} \wedge \vec{B}$$

$$\boxed{\vec{f} = I\,\vec{CD} \wedge \vec{B}}$$

Application: Soit une spire carrée de côté $2a$ placée dans une région où un champ magnétique de la forme $\overrightarrow{B} = \frac{\alpha}{x}\overrightarrow{e_y}$. La spire est parcourue par un courant d'intensité i, exprimer la force de Laplace subie par le côté A_1A_2 et par la spire.



$$\vec{f}_{A_1A_2} = \int_{c-a}^{c+a} i\,\vec{dl} \wedge \vec{B}$$

$$= \int_{c-a} i\,dx\,\vec{e_x} \wedge \frac{\alpha}{x}\vec{e_y}$$

$$= i\alpha\,\vec{e_z} \int_{c-a}^{c+a} \frac{1}{x}\,dx$$

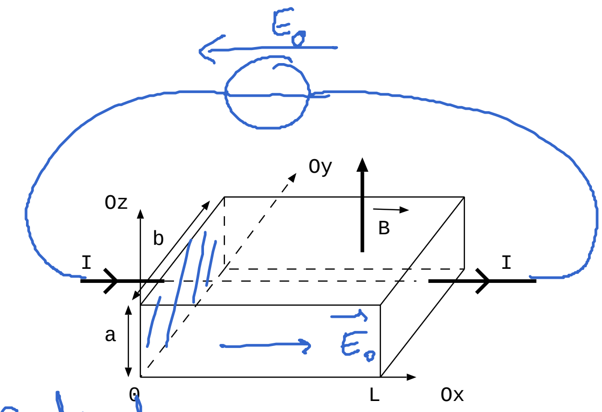
$$= i\alpha \ln\left(\frac{c+a}{c-a}\right) \vec{e_z}$$

$$\vec{f}_{total} = \underbrace{\vec{f}_{A_1A_2} + \vec{f}_{A_3A_4}}_{= 0} + \vec{f}_{A_2A_3} + \vec{f}_{A_4A_1} = i\,\vec{A_2A_3} \wedge \frac{\alpha}{c+a}\vec{e_y} + i\,\vec{A_4A_1} \wedge \frac{\alpha}{c-a}\vec{e_y}$$

$$= i(-2a)\vec{e_z} \wedge \frac{\alpha}{c+a}\vec{e_y} + i(2a\vec{e_z}) \wedge \frac{\alpha}{c-a}\vec{e_y}$$

$$= i\alpha 2a\left(-\frac{1}{c+a} + \frac{1}{c-a}\right)\vec{e_x}$$

2. Effet Hall



$S = ab$ surface traversée par $\vec j$

On considère un barreau de grande longueur L selon Ox avec une section droite rectangulaire de dimensions b selon Oy et a selon Oz. Ce barreau est parcouru par un courant I tel qu'en tout point du barreau $\overrightarrow{j} = j\overrightarrow{e_x}$. Ce courant correspond à un déplacement de charge q de vitesse $\overrightarrow{v}$. On note n^* la densité volumique de charges. Ce barreau est placé dans une zone de champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}$ On ne s'intéresse qu'au régime permanent établi.

Remarque: il faut comprendre que le courant I est créé par un générateur de fem U_0 à l'origine d'un champ électrique extérieur $\overrightarrow{E_0}$.

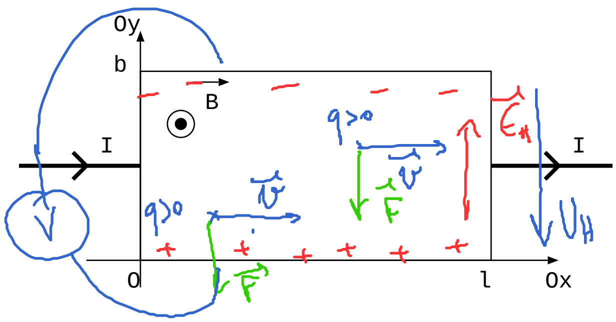
1- Décrire le mouvement des charges dans le barreau et montrer qu'il apparaît un champ électrique appelé champ de Hall.

2- Décrire les forces appliquées à un électron en régime permanent.

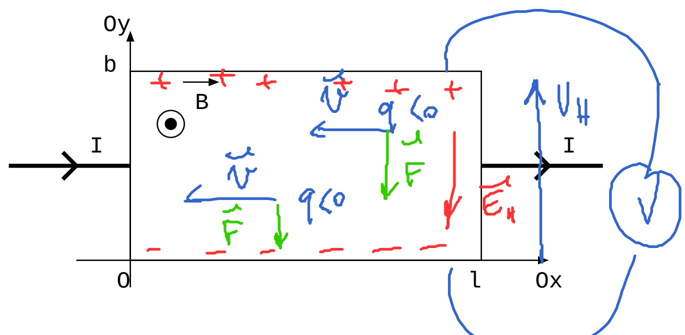
3- En déduire le champ de Hall $\overrightarrow{E_H}$ et en déduire l'expression de la tension de Hall U_H entre deux faces identifiées du barreau.

4- Le capteur est composé d'une pastille semi-conductrice largeur $a = 1\ mm$ et de hauteur $b = 0,1\ mm$ composée d'Antimoniure d'indium dans laquelle circule un courant d'intensité $I = 1\ A$. La densité volumique des porteurs de charge y est d'environ $n^* = 10^{22}\ m^{-3}$ contre $n^* = 10^{28}\ m^{-3}$ dans le cuivre. Discuter avec des critères quantitatifs de l'intérêt d'utiliser l'Antimoniure.

Vue de dessus pour des charges positives



Vue de dessus pour des charges négatives



Les charges + se déplacent dans le sens de I
Les charges − " dans le sens opposé à I
Les charges subissent la force $\vec F = q\vec v \wedge \vec B$ selon $(-Oy)$

Les charges + s'accumulent en $y=0$ par défaut il apparaît des charges − en $y = b$: $\vec E_H$ dirigé selon $+\vec e_y$ | Les charges − s'accumulent en $y=0$ par défaut il apparaît des charges + en $y = b$: $\vec E_H$ dirigé selon $-\vec e_y$

Selon (Oy) en régime permanent les forces se compensent : $q\vec v \wedge \vec B + q\vec E_H = \vec 0$

soit $\vec E_H = -\vec v \wedge \vec B$ avec $\vec j = n^* q \vec v = \quad \vec e_x$

d'où $\vec E_H = -\frac{I}{n^* q ab}\vec e_x \wedge B\vec e_z = \frac{I}{n^* q ab} B\vec e_y$

$q>0$ $\vec E_H$ selon $+\vec e_y$
$q<0$ $\vec E_H$ selon $-\vec e_y$

$U_H = \|\vec{E}_H\| b = \dfrac{I\,B}{n^*|q|a}$ d'autant + grande que n^* est petit

L'effet Hall sert à mesurer la valeur de B

on mesure U_H et on en déduit B par $B = \dfrac{n^*|q|a}{I} U_H$

La mesure est + précise pour U_H grand soit pour n^* petit.