TD conduction électrique

I. **Densité volumique d'électrons**

On cherche le nombre d'atomes d'aluminium par unité de volume soit $n^*_{Al} = \dfrac{N_{Al}}{V} = \dfrac{n_{Al}\mathcal{N}_a}{V} = \dfrac{m_{Al}\mathcal{N}_a}{VM} = \dfrac{\mu\mathcal{N}_a}{M} = 6,0.10^{28}\ atomes.m^{-3}$ (attention: $M = 27.10^{-3}\ kg.m^{-3}$).

Chaque atome libère trois électrons de conduction donc $n^* = 3n^*_{Al} = 1,8.10^{29}\ electrons.m^{-3}$.

On utilise $\overrightarrow{j} = n^*(-e)\overrightarrow{v}$ soit $v = \dfrac{j}{n^*e} = \dfrac{I}{Sn^*e} = \dfrac{I}{\pi R^2 n^* e} = 6,6\ \mu m.s^{-1}$.

II. **Intensité dans un câble**

On a $I = \displaystyle\iint \overrightarrow{j}\,dS\overrightarrow{n} = \iint j dS$ où S est la surface traversée par le courant soit la surface d'un disque. On ne peut pas sortir j de l'intégrale car il n'est pas uniforme. Un point M sur le disque est repéré par r et θ soit $dS = drrd\theta$.

On a donc $I = j_0 \displaystyle\int_0^R (1 - \frac{r}{R})rdr \int_0^{2\pi} d\theta = j_0[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R}]_0^R 2\pi = 2\pi j_0(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{3}) = \frac{\pi j_0 R^2}{3}$.

III. **La foudre**

1. L'intensité est le débit de charges soit $I = \dfrac{dq}{dt}$ où dq est la charge qui traverse la section du conducteur pendant dt.

La charge totale mise en jeu au cours de la foudre est $|Q| = I\Delta t = 1250\,C$, on en déduit le nombre d'électrons par $N = \dfrac{|Q|}{e} = 7,8.10^{21}\ e^-$.

2. La conductivité intervient dans la loi d'Ohm: $\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E}$ soit en norme $j = \gamma E$ et $\gamma = \dfrac{j}{E}$ avec $j = \dfrac{I}{S} = \dfrac{I}{\pi(d/2)^2} = 7,07.10^8\ A.m^{-2}$. AN: $\gamma = \dfrac{7,07.10^8}{20\ 000} = 3,5.10^3\ S.m^{-1}$.

3. La résistance d'un cable de conductivité γ, de longueur l et de section $S = \pi(d/2)^2$ est $R = \dfrac{l}{\gamma S}$. AN: $R = 200\ \Omega$.

La puissance dissipée par effet Joule est $P = RI^2$, l'énergie est $E_J = RI^2\Delta t = 1,25.10^{10}\ J$.

IV. **Modèle de Drude**

1. On cherche le nombre d'atomes de plomb par unité de volume soit $n^*_{Pb} = \dfrac{N_{Pb}}{V} = \dfrac{n_{Pb}\mathcal{N}_a}{V} = \dfrac{m_{Pb}\mathcal{N}_a}{VM} = \dfrac{\rho\mathcal{N}_a}{M} = 3,3.10^{28}\ atomes.m^{-3}$ (j'ai noté N_{Pb}, le nombre d'atomes de plomb dans le volume V, n_{Pb}, le nombre de moles dans le volume V et m_{Pb}, la masse de plomb dans le volume V).

Chaque atome libère deux électrons de conduction donc $n^* = 2n^*_{Pb} = 6,6.10^{28}\ electrons.m^{-3}$.

2. On utilise $\overrightarrow{j} = n^*(-e)\overrightarrow{v}$ soit $v = \dfrac{j}{n^*e} = \dfrac{I}{Sn^*e} = \dfrac{I}{\pi R^2 n^* e} = 60\ \mu m.s^{-1}$.

3. On applique $\overrightarrow{j} = n^*(-e)\overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{v}$ qui est la vitesse limite atteinte par les électrons sous l'action de la force électrique et de la force de frottements soit $-e\overrightarrow{E} - \dfrac{m}{\tau}\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ donne $\overrightarrow{v} = -\dfrac{e\tau}{m}\overrightarrow{E}$.

On a donc $\overrightarrow{j} = n^*(-e)\overrightarrow{v} = \dfrac{n^*e^2\tau}{m}\overrightarrow{E} = \gamma\overrightarrow{E}$ donc $\gamma = \frac{n^*e^2\tau}{m} = 1,9.10^3\ S.m^{-1}$.

V. **Résistance d'un conducteur**

On applique la loi d'Ohm locale $\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E}$ soit en norme $j = \gamma E$.

On a $I = jS = jab$ (S surface perpendiculaire à I et $\overrightarrow{j}$)

On a aussi $E=\dfrac{U}{L}$

On en déduit $\dfrac{I}{ab}=\gamma\dfrac{U}{L}$ soit $U=\dfrac{L}{\gamma ab}I$ de la forme $U=RI$ (loi d'Ohm intégrale) soit $R=\dfrac{L}{\gamma ab}$.

La puissance cédée par le champ électrique pour mettre les charges en mouvement est $P=\iiint \vec{j}.\vec{E}d\tau=\iiint \dfrac{j^2}{\gamma}d\tau=\iiint\dfrac{I^2}{(ab)^2\gamma}d\tau=\dfrac{I^2}{(ab)^2\gamma}\iiint d\tau=\dfrac{I^2}{(ab)^2\gamma}abL=\dfrac{L}{\gamma ab}I^2=RI^2$: on conclut que la puissance cédée par le champ électrique est entièrement perdue par effet Joule.

VI. **Effet Joule dans un conducteur sphérique**

1. I est le flux de $\vec{j}(r)$ à travers la sphère de rayon r soit $I=j(r)4\pi r^2$ donc $\vec{j}=\dfrac{I}{4\pi r^2}\vec{e_r}$.

On applique la loi d'Ohm: $\vec{j}=\gamma\vec{E}$ soit $\vec{E}=\dfrac{\vec{j}}{\gamma}=\dfrac{I}{4\pi r^2\gamma}\vec{e_r}$.

2. On a $d\tau=drd\theta r\sin\theta d\phi$.

La puissance donnée par le champ électrique aux charges pour les mettre en mouvement est $P=\iiint\vec{j}.\vec{E}d\tau=\iiint\gamma j(r)^2d\tau=\iiint\dfrac{I^2}{\gamma 16\pi^2r^4}r^2dr\sin\theta d\theta d\phi=\dfrac{I^2}{\gamma16\pi^2}\int_{R_1}^{R_2}\dfrac{dr}{r^2}\int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi=\dfrac{I^2}{\gamma16\pi^2}(\dfrac{-1}{b}+\dfrac{1}{a})4\pi=\dfrac{I^2}{\gamma4\pi}\dfrac{b-a}{ab}$ de la forme RI^2 donc $R=\dfrac{b-a}{\gamma4\pi ab}$.

VII. **Résistance d'un conducteur cylindrique**

1. Soit le système élémentaire compris entre les cylindres de rayons r et $r+dr$. On est en régime stationnaire donc la charge à l'intérieur du système est constante soit la charge qui entre est égale à la charge qui sort soit $j(r)2\pi rhdt=j(r+dr)2\pi(r+dr)hdt$ donne $I(r)=I(r+dr)$ donc I ne dépend pas de r.

2. $I=j(r)2\pi rh$ soit $j(r)=\dfrac{I}{2\pi rh}$.

D'après la loi d'Ohm locale $\vec{j}=\gamma\vec{E}$ soit $\vec{E}=\dfrac{\vec{j}}{\gamma}=\dfrac{j(r)}{\gamma}\vec{e_r}=\dfrac{I}{2\pi rh\gamma}\vec{e_r}$.

3. On applique $\vec{E}=-\overrightarrow{\text{grad}}V=-\dfrac{dV}{dr}\vec{e_r}=\dfrac{I}{2\pi rh\gamma}\vec{e_r}$.

donc $\dfrac{dV}{dr}=-\dfrac{I}{2\pi rh\gamma}$ soit $V(r)=-\dfrac{I}{2\pi h}\ln r+A$. On en déduit la tension $U=V(r=R_1)-V(R_2)=-\dfrac{I}{2\pi h}\ln R_1+A+\dfrac{I}{2\pi h}\ln R_2-A=\dfrac{I}{2\pi h}\ln(\dfrac{R_2}{R_1})$ de la forme $U=RI$ soit $R=\dfrac{1}{2\pi h}\ln(\dfrac{R_2}{R_1})$.