Aide pour le TD

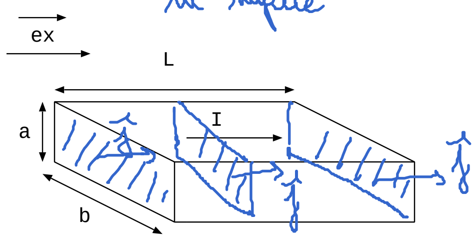
1. On donne différentes situations où l'intensité I est uniforme. Exprimer le vecteur densité de courant $\vec{j}$.

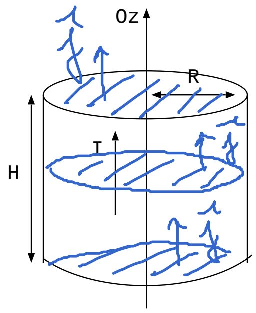
On utilise $I = \iint_S \vec{j} \cdot dS\,\vec{n}$ où S est la surface ⊥ à la direction commune de I et $\vec{j}$

qui donne : $I = j \times S$ lorsque $\vec{j}$ est uniforme sur la surface S

Pour les exemples suivants, $\vec{j}$ est uniforme. dans ces 2 exp en tout point $\vec{j}$ traverse toujours la même surface

$\vec{j} = \frac{I}{ab}\vec{e_x}$



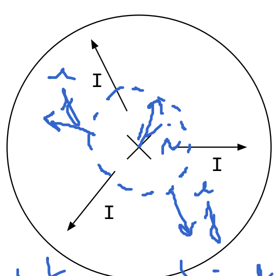


$\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2}\vec{e_z}$

Pour les exemples suivants, on donne $\vec{j} = j(r)\vec{e_r}$: dans ces exp, $\vec{j}$ n'est pas le même en tout point de l'espace mais il est le même sur la surface ⊥ à I traversée par le courant donc on peut utiliser $I = j \times S$

ici la surface ⊥ à I est une sphère

sphère de rayon R



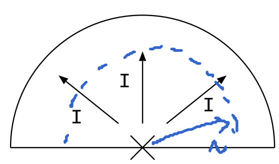
I est le même à travers n'importe quelle sphère de rayon r :
$I = j(r) \times 4\pi r^2$

quand r ↗, S ↗ donc j ↘

$\vec{j} = \frac{I}{4\pi r^2}\vec{e_r}$

ici la surface ⊥ à I est une 1/2 sphère

demi sphère
de rayon R



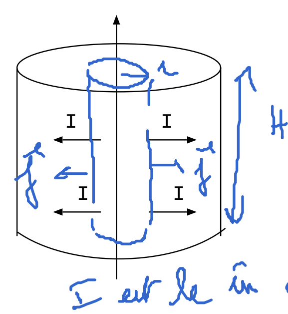
I est le même à travers toute 1/2 sphère de rayon r : $I = j(r)\, 2\pi r^2$

quand r ↗, S ↗ et j ↘

$\vec{j} = \frac{I}{2\pi r^2}\vec{e_r}$

ici la surface ⊥ à I est la surface latérale du cylindre

cylindre de rayon
R et de hauteur H



I est le même à travers tout cylindre de rayon r :
$I = j(r)\, 2\pi r H$

quand r ↗, S ↗ et j ↘

$\vec{j} = \frac{I}{2\pi r H}\vec{e_r}$

2. Soit le champ électrique $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\vec{e_r}$ en coordonnées cylindriques. Donnée: $\overrightarrow{\text{grad}}V(r) = \dfrac{dV}{dr}\vec{e_r}$.

Exprimer $U = V(R_1) - V(R_2)$.

On applique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\dfrac{dV}{dr}\vec{e_r} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e_r}$

1ère façon : $\dfrac{dV}{dr} = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$ donc $V(r) = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln r + A$

$U = V(R_1) - V(R_2) = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln R_1 + \cancel{A} + \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln R_2 - \cancel{A} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)$

2ème façon ; je sépare les variables et j'intègre entre R_1 et R_2 :

$\displaystyle\int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\,dr$ donc $V_2 - V_1 = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)$

d'où $U = V_1 - V_2 = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)$

3. Soit le champ électrique $\vec{E} = \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e_r}$ en coordonnées sphériques. Donnée: $\overrightarrow{\text{grad}}V(r) = \dfrac{dV}{dr}\vec{e_r}$.

Exprimer $U = V(R_1) - V(R_2)$.

j'applique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ soit $\dfrac{dV}{dr} = -\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon r^2}$

1ère façon : $V = +\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r} + A$

$U = V(R_1) - V(R_2) = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon R_1} + \cancel{A} - \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R_2} - \cancel{A} = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)$

2ème façon : je sépare les variables et j'intègre.

$\displaystyle\int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{R_1}^{R_2}\frac{Q}{2\pi\varepsilon r^2}\,dr$ donc $V_2 - V_1 = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon}\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right)$

$U = V_1 - V_2 = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon}\left(\dfrac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}\right)$