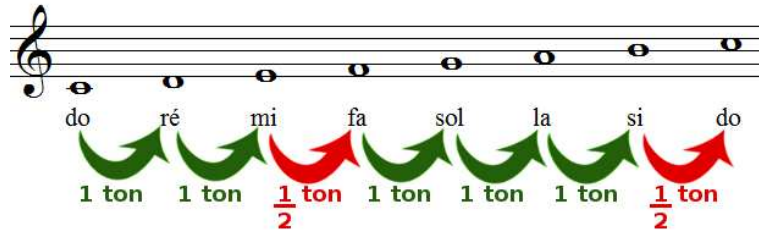
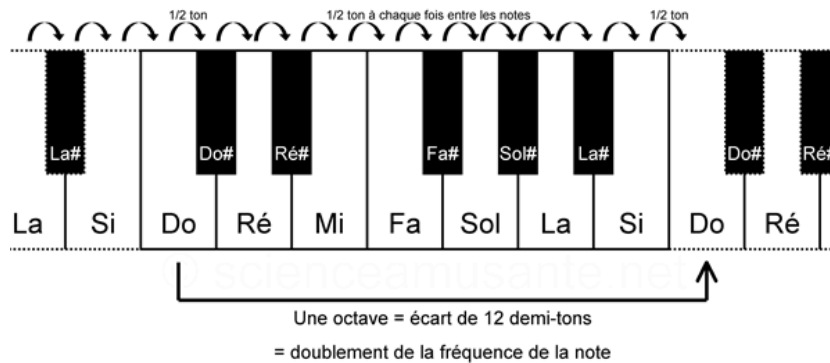


Ondes et musique

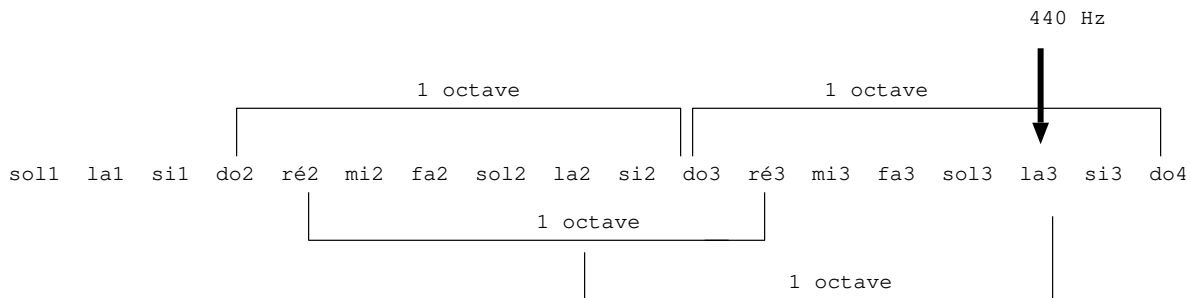
On fait l'étude dans la gamme tempérée de do majeur. La gamme tempérée est la gamme usuellement utilisée de nos jours, dans laquelle l'octave est divisée en douze intervalles (demi-tons) égaux. Une octave est l'intervalle séparant deux sons dont la fréquence du plus aigu est le double de celle du plus grave (intervalle de la forme $[f, 2f]$), et chaque octave est divisée en une suite géométrique de 12 demi-tons. Le rapport de fréquence de deux demi-tons successifs a pour valeur approchée $k = 1,05946$. L'écart entre deux notes successives est d'un ton, sauf entre mi et fa, et sauf entre si et do où il n'y a qu'un seul demi-ton.



Exemple sur le piano :



Pour différencier les octaves, on les numérote et on donne un numéro aux notes qui se situent dans cette octave. La convention française donne le numéro 3 au la de 440 Hz, il se note la_3 . Dans ce système, le la de 220 Hz sera le la_2 . Le changement d'octave se fait à partir du do : on passe du si_1 au do_2 , du si_2 au do_3 , ...



1. Exprimer en fonction de k le rapport de fréquences 2. Justifier la valeur du rapport de fréquence k entre deux demi-tons consécutifs.
3. Les six cordes de guitare sont associées aux notes mi_1 , la_1 , re_2 , sol_2 , si_2 et mi_3 . Déterminer les fréquences des trois cordes les plus aiguës.

On consacre la suite du problème à l'étude de la guitare.

Schéma de la guitare classique :



Les clés permettent d'accorder l'instrument en tendant ou en détendant les cordes. Chacune des six cordes doit être tendue de façon à sonner juste.

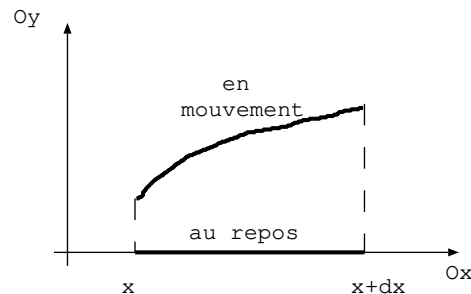
Les Frettes (ou Barrettes) : Elles divisent le manche en 20, 22 ou 24 cases selon les guitares. Les frettes permettent en appuyant la corde à l'aide du doigt sur ce support changer la hauteur de la note jouée, c'est à dire sa fréquence. En pratique, le doigt appuie dans la case (espace entre les barrettes) précédant la barrette.

Les Cases correspondent à l'espace entre deux frettes. Chaque case vaut un demi-ton, les cases les plus longues en haut du manche correspondent aux notes graves, et les cases les plus courtes en bas du manche aux notes aigus. Certaines cases sont marquées par des points qui servent au guitariste pour se repérer sur le manche.

On va s'intéresser aux vibrations produites par des cordes de guitare. On considérera que les cordes sont tendues sur $L = 64,2 \text{ cm}$ entre le sillet de tête et le chevalet. Au nombre de six, leur tirant ou diamètre varie suivant la fréquence qui leur est associée. Les trois dernières, les plus fines correspondant aux sons les plus aigus, sont en acier de diamètres $d = 0,30 \text{ mm}$, $d = 0,50 \text{ mm}$ et $d = 0,70 \text{ mm}$. On donne la masse volumique de l'acier : $\rho = 7,87 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. De la plus grave à la plus aigue, elles sont associées aux notes mi_1 , la_1 , re_2 , sol_2 , si_2 et mi_3 . Ces notes constituent les fondamentales de chacune des cordes.

4.

On considérera les cordes au repos parallèles à un axe Ox et les petits déplacements purement transversaux selon une direction Oy . Les cordes seront supposées sans raideur, et la pesanteur négligée. On note T la tension d'une corde et μ sa masse linéique.



4.a. Etablir l'équation de d'Alembert vérifiée par les cordes de la guitare.

4.b. Préciser l'expression de la célérité.

5. Quel type d'onde peut s'établir sur une corde de guitare ? Etablir la relation de quantification donnant les fréquences propres associées aux modes propres d'une corde de longueur L .

6. Déterminer numériquement les tensions des trois cordes en acier (donnant les notes les plus aigus). Vérifier ainsi pour une corde que le poids est bien négligeable devant la tension de la corde.

7. Lorsqu'une corde métallique est retirée de la guitare, et qu'on la fait vibrer, le son obtenu est presque inaudible. Il en est de même pour une guitare électrique qui n'est pas branchée. Pourquoi ?

8.

8.a. Pourquoi appuyer sur la corde à l'aide du doigt sur les frettes permet de changer la hauteur de la note jouée ? La note devient-elle plus grave ou plus aigüe ? Cet effet est-il général dans les instruments à cordes ?

8.b. Quelle longueur doit avoir la corde de mi_3 pour obtenir le la_3 de référence de la gamme ? En utilisant la figure de la guitare donnée dans cet énoncé, déterminer sur quelle case doit on appuyer.

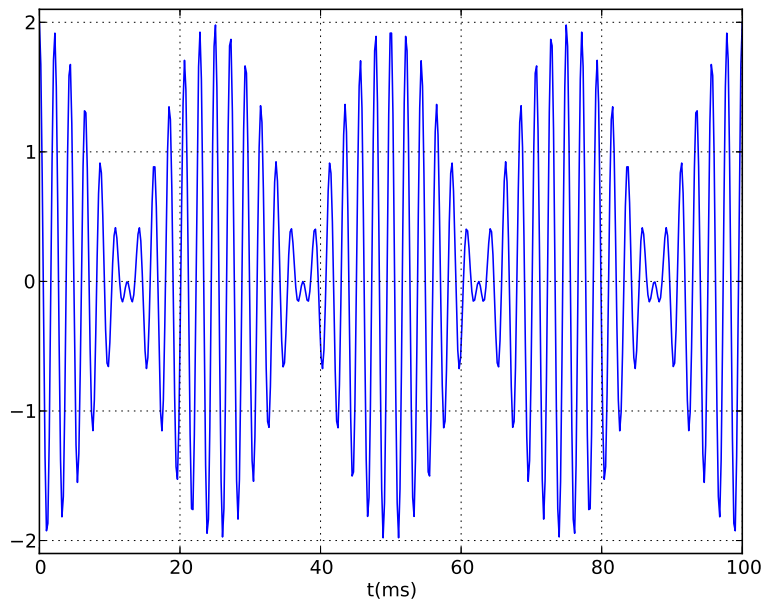
9. Les cordes sont fixées au haut du manche à des clés. En les tournant, la corde étant enroulée sur la clé, sa tension varie. Cela permet d'accorder la guitare, c'est-à-dire de faire vibrer chaque corde à sa fréquence nominale. On peut le faire directement à l'oreille ... si l'on a l'oreille absolue, ou en utilisant un accordeur ou un diapason qui produit une note de référence.

Pourquoi cet accord est-il nécessaire ? Pourquoi une guitare n'est-elle pas accordée une fois pour toutes ? Comment doit-on agir sur la tension exercée sur une corde pour rendre le son plus aigüe ?

10. On considère la situation simplifiée où la note de référence du diapason de fréquence f_0 et la note produite par la corde de fréquence f_1 sont légèrement différentes : $f_1 = f_0 + \Delta f$ avec Δf positif ou négatif et $|\Delta f| \ll f_0$. On suppose aussi ces sons de même intensité.

On notera donc $p_0(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ et $p_1(t) = A \cos(2\pi f_1 t + \phi)$ les surpressions reçues par le musicien si une note était jouée seule (respectivement celle du diapason et de la corde).

10.a. Exprimer la surpression $p(t)$ si ces deux notes sont jouées en même temps. Montrer que $p(t)$ peut se représenter comme sur le graphe suivant, et interpréter.



Déduire de cette courbe, les valeurs numériques de f_0 et $|\Delta f|$ dans ce cas précis.

10.b. Comment peut on déterminer à l'oreille si la corde est légèrement désaccordée? Le musicien agit sur une clé. Comment fait-il à l'oreille pour accorder la corde?

11. On constate que pour un quart de tour de clé, le son produit par la corde la plus fine passe du mi_2 au mi_3 . Le cylindre sur lequel est fixée la corde à un diamètre de 5 mm. Trouver une estimation du module d'Young E pour l'acier.

On donne : sur wikipédia, on trouve $E = 210 \text{ GPa}$ pour l'acier.

On rappelle que la force F que l'on doit exercer pour faire varier de ΔL un matériau de longueur initiale L et de section S s'écrit: $F = ES \frac{\Delta L}{L}$.

12. Pour prendre en compte la raideur de la corde, on introduit dans le bilan des forces qui s'exercent sur un élément de corde de longueur dx une force supplémentaire orientée parallèlement à son déplacement, et qui tend à s'opposer à la courbure de la corde : $\vec{dR} = -\gamma \frac{\partial^3 \alpha}{\partial x^3} dx \vec{e}_y$ où $\gamma = \frac{\pi E d^4}{64}$ pour une corde cylindrique de diamètre d . α désigne l'angle que fait la tangente locale à la corde en x avec l'horizontale Ox .

12.a. Quelle est la dimension de γ ? Quel est son ordre de grandeur ?

12.b. Montrer que la nouvelle équation vérifiée par $y(x, t)$ en tenant compte de la raideur de la corde est $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\gamma}{\mu c^2} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$.

12.c. On cherche des solutions harmoniques de l'équation précédente sous la forme d'ondes stationnaires. Justifier le choix d'ondes stationnaires et vérifier que la relation de dispersion s'écrit $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\gamma}{c^2 \mu} k^4$.

12.d. Montrer que la norme du vecteur d'onde est quantifiée.

12.e. Etablir l'expression des fréquences propres de cette corde, que l'on écrira sous la forme $f_n = f_n^{ideal} (1 + \epsilon n^2)^\alpha$ avec ϵ et α des constantes à expliciter en fonction des paramètres du problème.

12.f. Quelle est qualitativement l'effet de la raideur sur une corde réelle, par rapport au modèle de la corde idéale ? Pour quelle corde de la guitare cet effet sera-t-il le plus important ?

12.g. AN : Calculer l'écart de fréquence qu'introduit la raideur pour le fondamental de la corde la plus aigüe, ainsi que pour la troisième harmonique de cette même corde. Le savart est défini de la façon suivante : deux fréquences f_1 et f_2 sont séparées de $1000 \log(\frac{f_1}{f_2})$ savarts. Un musicien peut au mieux distinguer deux sons séparés de 5 savarts. L'écart de fréquence introduit par la raideur est-il perceptible ? Donnée : le module d'Young de l'acier égal à $E = 210$ GPa.