Correction ondes et musique

1. Entre do et ré, il y a deux demi-tons, entre ré et mi également, entre mi et fa il y a un demi-ton, entre fa et sol, deux demi-tons, de même entre sol et la puis entre la et si. Pour finir il y a un demi-ton entre si et do. Donc entre les deux do séparés d'une octave, il y a $2+2+1+2+2+2+1 = 12$ demi-tons. Une octave correspond à un intervalle de fréquence de la forme $[f_0, 2f_0]$ et un demi-ton correspond à un intervalle de la forme $[f_0, kf_0]$ avec $k^{12} = 2$ (puisqu'une octave correspond à 12 demi-tons soit $[f_0, kf_0]$, premier demi-ton, $[kf_0, k^2f_0]$, deuxième demi-ton, $[k^2f_0, k^3f_0]$, troisième demi-ton...).

On a donc $k = 2^{1/12} = 1,05946$ (valeur donnée dans l'énoncé).

2. Pour le la_3 on a une fréquence de 440 Hz. On en déduit que le la_2 a une fréquence de $\frac{440}{2} = 220\ Hz$. Entre sol_2 et la_2, il y a deux demi-tons donc la fréquence du sol_2 est $\frac{220}{k^2} = 196\ Hz$. De même entre la_2 et si_2, il y a deux demi-tons donc la fréquence du si_2 est $220.k^2 = 247\ Hz$. Entre mi_3 et la_3, il y a 5 demi-tons (1 demi-ton entre mi_3 et fa_3, 2 demi-tons entre fa_3 et sol_3, puis 2 demi-tons entre sol_3 et la_3), la fréquence du mi_3 est donc $\frac{440}{k^5} = 330\ Hz$.

3. C'est la démonstration du cours, on applique la RFD à l'élément de corde entre x et $x+dx$. On projette la RFD sur Ox, on montre que la tension de la corde est uniforme. On projette la RFD sur Oy et on obtient $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$. On en déduit la célérité des ondes sur la corde $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

4. La corde de guitare est un milieu limité donc une onde progressive subit aux extrémités de la corde des réflexions multiples pour former, pour certaines fréquences, une onde stationnaire.

Aux deux extrémités de la corde se trouvent des noeuds de vibration donc on a $L = \frac{\lambda}{2}$ avec $\lambda = \frac{c}{f}$ soit $f = \frac{c}{2L}$.

5. On a d'après les questions précédentes que $c = 2Lf$ avec $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{T}{\rho\pi d^2}}$, on peut donc en déduire la tension des cordes par $T = c^2\rho\pi\frac{d^2}{4} = L^2f^2\rho\pi d^2$

Les cordes les plus fines correspondent aux sons les plus aigus, on peut donc associer la fréquence et le diamètre de corde correspondant, puis en déduire la tension de la corde. Les résultats sont dans le tableau suivant.

corde	sol_2	si_2	mi_3
fréquence	196	247	330
diamètre	$0,70\ mm$	$0,50\ mm$	$0,30\ mm$
tension	$192\ N$	$155\ N$	$100\ N$

Le poids d'une corde est $\rho L\pi\frac{d^2}{4}g = 0,02\ N$ pour la corde de diamètre $0,70\ mm$, c'est bien négligeable devant les forces de tension des cordes.

6. Le son émis par la corde est inaudible, la corde qui vibre à l'intérieur de la guitare émet un son qui est amplifié par le corps de la guitare : c'est un phénoène de résonance. Dans tous les instruments de musique, le violon, les orgues, le corps de l'instrument permet d'amplifier le son.

7.

7.a. En appuyant le doigt sur une frette, on diminue la longueur de la corde. La nouvelle longueur correspondante est celle comprise entre la frette sur laquelle on appuie et le chevalet sur le schéma proposé. Le fait d'appuyer sur une frette ne modifie par la tension de la corde. On a $f = \frac{c}{2L}$: lorsque la tension n'est pas modifiée, c n'est pas modifiée et donc plus la longueur est réduite plus la fréquence est élevée, le son est donc plus aigu.

7.b. Pour le mi_3, on a la relation : $f_{mi_3} = \frac{c}{2L_{mi_3}}$, de même pour le la_3 : $f_{la_3} = \frac{c}{2L_{la_3}}$. La vitesse de propagation de l'onde est la même dans les deux cas puisque la tension de la corde est identique. On a donc $L_{mi_3} = L_{la_3}\frac{f_{mi_3}}{f_{la_3}} = 48,2\ cm$. Il faut appuyer sur la cinquième frette en partant du haut. En effet la longueur L donnée dans l'énoncé est la longueur entre le sillet et l'extrémité en B de la corde. Entre deux frettes, il y a un demi-ton et pour passer du la_3 au mi_3, il y a 5 demi-tons, donc il faut appuyer sur la cinquième frette pour jouer un la_3 sur le corde de mi_3.

8. Un instrument n'est pas définitivement accordé car la tension des cordes dépend de la température (dilatation ou contraction de la corde), car on peut toucher à la clé sans faire attention et modifier la tension par mégarde...

La vitesse de propagation est d'autant plus grande que la corde est tendue. La relation $f = \frac{c}{2L}$ montre que pour rendre le son plus aigu, ce qui revient à augmenter la fréquence, il faut augmenter la vitesse et donc augmenter la tension de la corde.

9.

9.a. La surpression est la somme des surpressions liées à chacune des notes jouées, on a $p(t) = p_0(t) + p_1(t) = A\cos(2\pi f_0 t) + A\cos(2\pi f_1 t + \phi) = 2A\cos(2\pi\frac{f_0+f_1}{2}t + \frac{\phi}{2})\cos(2\pi\frac{f_0-f_1}{2}t - \frac{\phi}{2}) \approx 2A\cos(2\pi f_0 t + \frac{\phi}{2})\cos(2\pi\frac{\Delta f}{2}t - \frac{\phi}{2})$.

9.b. La courbe observée présente une enveloppe à basse fréquence, ici la fréquence $|\frac{\Delta f}{2}|$, à l'intérieure de cette enveloppe oscille un signal de plus grande fréquence, ici de fréquence f_0.

On peut définir T_b, la période entre deux minima nuls sur l'enveloppe, T_b est en fait la moitié de la période de l'enveloppe qui est $T_e = \frac{2}{\Delta f}$. On a donc $T_b = \frac{1}{|\Delta f|} = \frac{75}{3}\ ms$ donc $|\Delta f| = \frac{3}{0,075} = 40\ Hz$.

A l'intérieur de l'enveloppe, les oscillations ont pour période $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{11}{5}\ ms$ soit $f_0 = \frac{5}{0,011} = 450\ Hz$.

9.c. Lorsque la corde est légèrement désaccordée, le musicien entend des battements, ce sont sur la courbe, les valeurs nulles de la surpression sur l'enveloppe. Lorsque les fréquences f_0 et f_1 se rapprochent, la période des battements augmente et au contraire, lorsque les deux fréquences s'éloignent, la période des battements diminue. Pour accorder l'instrument, il faut donc augmenter la période des battements jusqu'à ne plus en entendre.

10. On applique $F = ES\frac{\Delta L}{L}$

avec $S = \pi\frac{d^2}{4} = \pi\frac{0,0003^2}{4}\ m^2$

avec $\frac{\delta L}{L} = \frac{\frac{2\pi R}{4}}{L} = \frac{\frac{2\pi 0,0025}{4}}{0,642}$

avec $F = T_{mi_3} - T_{mi_2} = L^2\rho\pi d^2(f_{mi_3}^2 - f_{mi_2}^2) = 0,642^2.7,87.10^3.\pi.0,0003^2(330^2 - 165^2) = 75\ N$.

On en déduit donc le module d'Young: $E = \frac{F.S.L}{\Delta L} = 1,7.10^11\ Pa = 170\ GPa$ voisin de la valeur donnée $210\ GPa$. L'estimation est satisfaisante.

11.

11.a. On trouve l'unité de γ par analyse dimensionnelle:

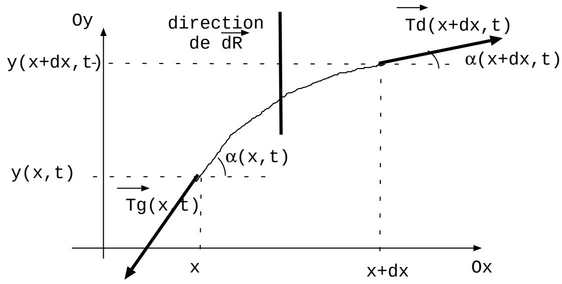
$[\gamma] = [\frac{dR}{\frac{\partial^3\alpha}{\partial x^3}dx}] = [\frac{kg.m.s^{-2}}{m^{-3}.m}] = kg.m^3.s^{-2}$.

ou $[\gamma] = [Ed^4] = Pa.m^4 = kg.m^{-1}.s^{-2}.m^4 = kg.m^3.s^{-2}$

Ordre de grandeur: $\gamma = \frac{\pi 210.10^9 0,0003^4}{64} = 8,4.10^{-5}\ Pa.m^{-4}$ pour la corde la plus fine.

11.b.

On applique la RFD à l'élément de corde entre x et $x+dx$ en négligeant le poids soit: $\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{T_d}(x+dx,t)+\overrightarrow{T_g}(x,t)+\overrightarrow{dR}$



La projection sur Ox montre que la norme de la tension est uniforme

La projection sur Oy donne: $\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = +T\sin\alpha(x+dx,t) - T\sin\alpha(x,t) - \gamma dx \frac{\partial^3 \alpha}{\partial x^3} = T(\alpha(x+dx,t) - \alpha(x,t)) - \gamma dx \frac{\partial^3 \alpha}{\partial x^3} = T\frac{\partial \alpha}{\partial x}dx - \gamma dx \frac{\partial^3 \alpha}{\partial x^3}$

Or on a $\tan\alpha = \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$, on en déduit l'équation vérifiée par $y(x,t)$: $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ ou encore $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\gamma}{T}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$. En prenant $c^2 = \frac{T}{\mu}$, on trouve bien l'équation demandée.

11.c. On choisit une solution en onde stationnaire car la corde est un milieu limité, l'onde se réfléchit sur les deux extrémités de la corde (chevalet et sillet de tête ou chevalet et frette). Les réflexions multiples aux extrémités conduisent pour certaines fréquences à une onde stationnaire de la forme : $y(x,t) = y_0\sin(\omega t+\phi)\sin(kx+\psi)$.

On remplace cette solution dans l'équation de propagation (équation différentielle vérifiée par $y(x,t)$) pour trouver la relation de dispersion:

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y(x,t)$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y(x,t)$ et $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = +k^4 y(x,t)$

On obtient après simplification par $y(x,t)$: $-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\gamma}{c^2\mu}k^4$ soit $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\gamma}{c^2\mu}k^4$.

11.d. On suppose la corde de longueur L placée entre $x=0$ et $x=L$, en ces deux extrémités (chevalet et sillet de tête) on trouve un noeud de vibration. On applique les conditions aux limites : $y(0,t) = y_0\sin(\omega t+\phi)\sin(\psi) = 0$ soit $\psi = 0$ et $y(L,t) = 0 = y_0\sin(\omega t+\phi)\sin(kL)$ ce qui conduit à $kL = n\pi$. La norme du vecteur d'onde est bien quantifiée.

11.e. On remplace l'expression de k dans la relation de dispersion et on en déduit la pulsation: $(\frac{n\pi}{L})^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\gamma}{c^2\mu}(\frac{n\pi}{L})^4$ d'où $\omega^2 = (\frac{n\pi c}{L})^2(1+\frac{\gamma n^2\pi^2}{\mu c^2 L^2})^2$ ou encore $\omega = (\frac{n\pi c}{L})(1+\frac{\gamma n^2\pi^2}{TL^2})^{1/2}$. On convertit en fréquence: $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nc}{2L}(1+\frac{\gamma n^2\pi^2}{TL^2})^{1/2}$

Par identification avec l'énoncé, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\epsilon = \frac{\gamma\pi^2}{\mu c^2 L^2} = \frac{\gamma\pi^2}{TL^2}$ et $f_n^{ideal} = \frac{nc}{2L}$.

11.f. La raideur augmente les fréquences propres de la corde : celle-ci va vibrer à une fréquence plus élevée que la corde idéale. La raideur se fait davantage sentir aux harmoniques de rangs élevés (pour n grand). Cet effet est plus important pour la corde la moins tendue, donc la corde de mi_3.

11.g. AN : la corde la plus aigue est la corde mi_3 de tension $T = 100\ N$ et de diamètre $d = 0,30\ mm$. On calcule $\gamma = 8,4.10^{-5}\ SI$ et $\epsilon = 1,3.10^{-5}$.

Soit pour le fondamental $(n=1)$: $f_1' = f_1^{ideal}\sqrt{1+\epsilon} = 330,002\ Hz$ qui conduit à $1000\log(\frac{330,002}{330,000}) = 0,002$ savarts, ce qui n'est pas perceptible à l'oreille.

Soit pour le troisième harmonique $(n=3)$: $f_3' = f_3^{ideal}\sqrt{1+3^2.\epsilon} = 990,06\ Hz$ qui conduit à $1000\log(\frac{990,06}{990,000}) = 0,03$ savarts, ce qui n'est pas perceptible à l'oreille.

Conclusion : on peut négliger la raideur de la corde puisque son effet n'est pas perceptible par l'oreille.