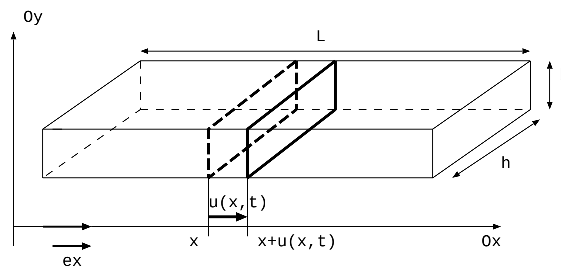
I. Exercice I

Cet exercice étudie certains instruments à percussion tels que le xylophone, le marimba ou le glockenspiel. Ils sont formés de lames parallélépipédiques de bois ou de métal. Chacune d'elles produit, lorsqu'on la frappe avec une baguette, un son de hauteur déterminée.

Glockenspiel

Marimba

On envisage les vibrations longitudinales d'une lame de longueur L. La matière située au repos dans le plan d'abscisse x se met en mouvement suite à une excitation. Elle occupe à l'instant t le plan d'abscisse $x + u(x,t)$ et est soumise, de la part de la matière située à **sa droite**, à une force $\overrightarrow{F_d} = F(x,t)\overrightarrow{e_x}$.



On note ρ la masse volumique et E le module d'Young du matériau dont on rappelle la définition : pour porter de l_0 à $l_0 + \delta l$ la longueur d'une tige de section S, il faut exercer sur ses extrémités une force égale à $ES\dfrac{\delta l}{l_0}$.

Données:

	bronze	acier	bois de palissandre
ρ (SI)	8700	7800	740
E (SI)	$11,0.10^{10}$	$19,5.10^{10}$	$1,2.10^{10}$

1. On considère le système infinitésimal compris entre x et $x+dx$ au repos. En présence d'une perturbation, la tranche en x s'est déplacée de $u(x,t)$ et la tranche en $x+dx$ s'est déplacée de $u(x+dx,t)$. Montrer que son allongement relatif s'écrit $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$. Que signifie physiquement le cas où $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) > 0$?

2. En déduire que $\overrightarrow{F_d}(x,t) = +ES\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)\overrightarrow{e_x}$.

3. Dans cette barre la vitesse de propagation des ondes est de la forme $c = E^{\alpha}\rho^{\beta}$. Déterminer par une analyse dimensionnelle les valeurs numériques de α et β. Commenter le résultat.

4. Montrer, par application de la RFD au système infinitésimal compris entre x et $x+dx$ que $u(x,t)$ vérifie une équation de d'Alembert.

5. On recherche des solutions de la forme $u(x,t) = u_0\sin(kx+\phi)\sin(\omega t)$. De quel type de solution s'agit-il? Justifier ce choix.

6. Déduire de l'équation de d'Alembert la relation entre k et ω.

7. Les deux extrémités de la barre en $x = 0$ et en $x = L$ sont fixes soit immobiles. Déterminer la valeur de ϕ et les valeurs possibles pour k_n ainsi que les valeurs possibles pour la longueur d'onde λ_n et la fréquence f_n de l'onde. Retrouver le résultat par un raisonnement utilisant des schémas.

8. On dispose de deux lames de glockenspiel de même longueur, l'une en acier et l'autre en bronze. Laquelle joue des notes plus graves? Justifier votre réponse.

9. Une lame de glockenspiel en acier de longueur $L = 16,2\ cm$ émet un son de fréquence égale à $785\ Hz$. Montrer qu'il ne peut pas résulter de l'excitation d'une onde longitudinale.

Les petits mouvements transversaux de la barre $y(x,t)$ permettent de déterminer les fréquences émises par les lames des instruments étudiés. On admet que $y(x,t)$ vérifie l'équation de propagation:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) + \frac{c^2 b^2}{12}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x,t) = 0$$

où b est la dimension de la lame selon l'axe Oy.

10. On recherche des solutions de la forme $y(x,t) = y_0 \sin(kx + \phi)\sin(\omega t)$. Déterminer la relation de dispersion entre k et ω pour ces ondes.

11. Lorsque la lame est libre à ses deux extrémités, montrer que les fréquences possibles s'écrivent $f_n = n^2 \dfrac{\pi c b}{4\sqrt{3}L^2}$.

La lame de glockenspiel en acier de longueur $L = 16,2\ cm$ émet un son de fréquence égale à $785\ Hz$. Calculer son épaisseur b. Commenter.

Les lames d'un marimba basse sont constituées de bois palissandre d'épaisseur $b = 2,31\ cm$. Quelle valeur faut-il donner à L pour atteindre $f = 130\ Hz$?