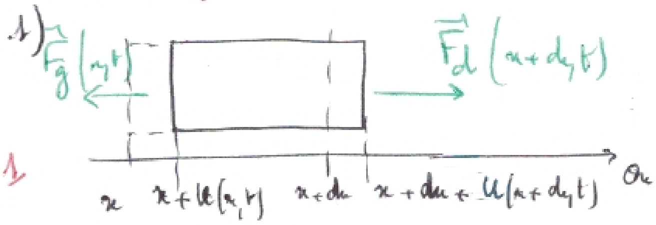
D.S. 1 de physique

Exercice I sur 34

1)



1

longueur au repos : $dx = l_0$

longueur en présence d'une onde : $\cancel{x} + dx + u(x+dx,t) - (\cancel{x} + u(x,t))$
$= dx\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) = l_0 + \delta l$

3

variation de longueur : $\delta l = dx \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$

variation relative de longueur : $\boxed{\frac{\delta l}{l_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)}$

par $u(x+dx,t) > u(x,t)$:
physiquement cela signifie que le système a subi une dilatation
1 mathématiquement cela se traduit par $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) > 0$
(la dérivée d'une fonction croissante est positive)

---

2) Lors que le système se dilate il faut $\vec{F}_d$ selon $(+Ox)$

1 soit $\boxed{\vec{F}_d(x,t) = ES \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,\vec{e}_x}$

---

3) $[C] = m.s^{-1}$ $\quad [E] = \left[\frac{F}{S}\right] = \frac{kg\,m\,s^{-2}}{m^2} = kg\,m^{-1}s^{-2}$ $\quad [\rho] = kg\,m^{-3}$

$C = E^{\alpha}\rho^{\beta}$ donne : $m\,s^{-1} = kg^{\alpha+\beta}m^{-\alpha-3\beta}s^{-2\alpha}$

2

par identification : $\begin{cases} 1 = -\alpha - 3\beta \\ 0 = \alpha + \beta \\ 1 = 2\alpha \end{cases}$ soit $\boxed{\begin{matrix}\alpha = 1/2 \\ \beta = -1/2\end{matrix}}$

donc $\boxed{C = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}$. plus le milieu est rigide soit peu déformable (E grand) et moins il est dense (ρ petit) et plus l'onde va vite

1

---

4) Le système infinitésimal subit selon (Ox) les forces :

1

* $\vec{F}_d(x+dx,t) = +ES \frac{\partial u}{\partial x}(x+dx,t)\,\vec{e}_x$
* $\vec{F}_g(x,t) = -\vec{F}_d(x,t) = -ES \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,\vec{e}_x$

Ce système a pour masse : $\rho S dx$ 2/

1 pour accélération : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,\vec{e_x}$ (dx est petit donc on suppose que tous les points de la barre ont la même accélération que celle de la tranche en x)

RFD : $\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,\vec{e_x} = + ES \frac{\partial u}{\partial x}(x+dx,t)\,\vec{e_x} - ES \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,\vec{e_x}$

D.L. à l'ordre 1 en dx

soit $\rho \cancel{S} \cancel{dx} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E\cancel{S} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \cancel{dx}$

1 d'où $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$ On reconnait une équation de d'Alembert de la forme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ avec $\boxed{c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}$

---

5) $u(x,t) = U_0 \sin(kx + \phi)\sin(\omega t)$: les variables de temps et d'espace

2 ne sont pas dans le même terme donc c'est une onde stationnaire. On choisit ce type de solution car le milieu de propagation est de taille finie.

---

6) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -k^2 u(x,t)$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = -\omega^2 u(x,t)$

2 En remplaçant dans l'équation de d'Alembert on a : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

soit $\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$

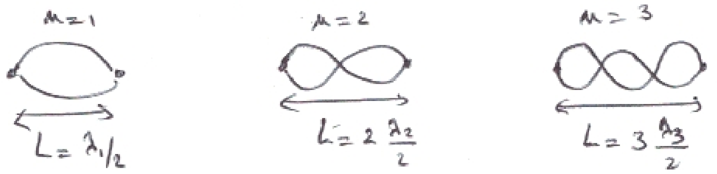
---

7) $u(x=0,t) = U_0 \sin(\phi)\sin(\omega t) = 0$ donc $\sin\phi = 0$ soit $\boxed{\phi = 0}$

$u(x=L,t) = U_0 \sin(kL)\sin(\omega t) = 0$ donc $\sin(kL) = 0$ soit $k_n L = n\pi$

3 $\boxed{k_n = \frac{n\pi}{L}} = \frac{2\pi}{\lambda_n}$ donc $\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}}$ et $\boxed{f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2L}}$

En $x=0$ et en $x=L$, il y a deux noeuds :

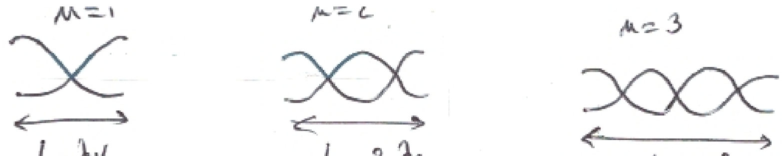
2 

$L = n\frac{\lambda_n}{2}$ ou $\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}}$

---

8) Lorsque les extrémités de la barre sont libres, en $x=0$ et $x=L$, il y a des ventres de vibration.

8) 2



$L = \frac{\lambda_1}{2}$ $L = 2\frac{\lambda_2}{2}$ $L = 3\frac{\lambda_3}{2}$ soit $\boxed{L = n\frac{\lambda_n}{2}}$

---

9) Pour le bronze : $c_b = \sqrt{\frac{11.10^{10}}{8700}} = 3560\ ms^{-1}$

Pour l'acier : $c_a = \sqrt{\frac{19,5.10^{10}}{7800}} = 5000\ ms^{-1}$

3 Les fréquences propres sont données par $f_n = n\frac{c}{2L}$: pour une longueur de lame donnée, elles sont d'autant plus élevées que c est grande donc les fréquences sont plus faibles pour le bronze, la lame de bronze joue des sons plus graves que la lame d'acier.

---

10) Pour une lame d'acier de longueur L = 16,2 cm on a : $f_1 = \frac{c_a}{2L} = 15,4$ kHz

1 très différent de la fréquence annoncée donc cela ne correspond pas aux ondes longitudinales étudiées.

---

11) $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y(x,t)$ $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = (-k^2)^2 y = k^4 y(x,t)$

2 soit en remplaçant dans l'équation de propagation : $-\omega^2 + \frac{c^2 b^2 k^4}{12} = 0$

d'où $\boxed{k^2 = \frac{\sqrt{12}\,\omega}{c\,b}}$

---

12) Pour une lame libre à ses extrémités on a trouvé $\lambda_n = \frac{2L}{n}$

soit $k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{L}$ donc $\frac{n^2\pi^2}{L^2} = \frac{\sqrt{12}\,2\pi f_n}{c\,b}$ $(\omega_n = 2\pi f_n)$

2 soit $\boxed{f_n = n^2 \frac{\pi c b}{2\sqrt{12}\,L^2} = n^2 \frac{\pi c b}{4\sqrt{3}\,L^2}}$

AN : $b = \frac{4\sqrt{3}L^2 f_1}{c_a} = 2,9$ cm   glockenspiel   ici n = 1, la fréquence de la lame est celle du fondamental

2 AN : $L = \sqrt{\frac{c_b b}{4\sqrt{3} f_1}} = 32$ cm   marimba

$c_b = \sqrt{\frac{E_b}{\rho_b}} = 4030\ ms^{-1}$