TD électrostatique

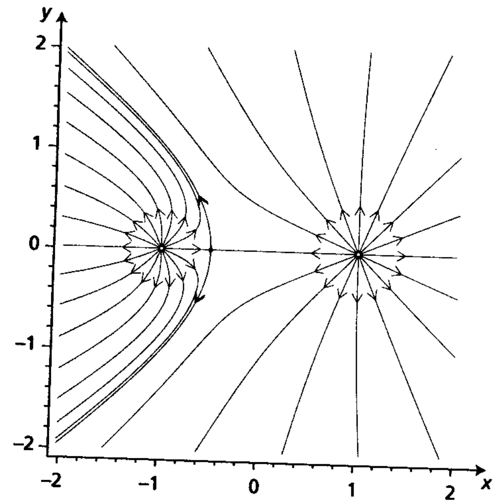
I. **Etude d'une carte de champ**

On donne la carte du champ électrique créé par deux charges.

1. Déterminer les coordonnées et les signes de ces charges.

2. Que peut-on dire du point $C(-0,5;0)$? En déduire une relation entre q_1 et q_2.

Réponse: $q_2 = 9q_1$

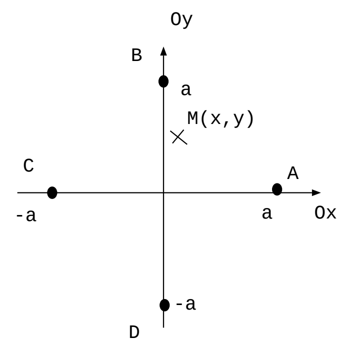


II. **Utilisation des symétries**

On considère quatre charges q identiques placées en $A(a, 0)$, $B(0, a)$, $C(-a, 0)$ et $D(0, -a)$. On se propose de calculer le potentiel en $M(x, y)$ proche de O en prenant pour valeur approchée du potentiel :

$$V(x, y) = V_0 + \alpha x + \beta y + \gamma xy + \delta x^2 + \chi y^2$$

Les coefficients α, β, γ, δ et χ sont constants.



1. Identifier tous les plans de symétrie présents dans cette distribution de charges. Déterminer pour chacun d'eux les coordonnées du point M_s symétrique de M par rapport au plan.

2. En deux points symétriques par rapport à un plan de symétrie P^+ que dire des potentiels électriques? En déduire que $V(x, y) = V_0 + \lambda(x^2 + y^2)$.

3. Que représente V_0? donner son expression.

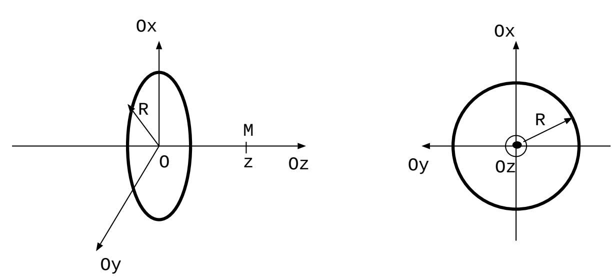
On admet que $\lambda = \dfrac{q}{\pi\epsilon_0 a^3}$.

4. En déduire le vecteur champ électrique en M. En utilisera les coordonnées cartésiennes puis les coordonnées polaires.

Réponses: 3- $V_0 = \dfrac{q}{\pi\epsilon_0 a}$ *4-* $\overrightarrow{E} = -2\lambda\overrightarrow{OM}$

III. **Deux spires**

Soit une spire de rayon R, de centre O et d'axe Oz portant la charge totale Q uniformément répartie sur la spire. Soit un point M de côte z sur l'axe Oz.

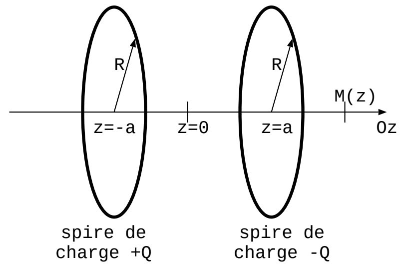


1. Utiliser les symétries pour prévoir la valeur du champ électrique en O et pour prévoir la direction du champ électrique en M de côte z.

2. Utiliser les symétries pour déterminer la relation entre $V(z)$ et $V(-z)$, et la relation entre $\overrightarrow{E}(z)$ et $\overrightarrow{E}(-z)$.

3. Exprimer le potentiel créé par la spire en tout point $M(z)$. En déduire l'expression du champ électrique en $M(z)$. Vérifier les relations entre $V(z)$ et $V(-z)$, et $\overrightarrow{E}(z)$ et $\overrightarrow{E}(-z)$.

4. On considère la distribution suivante, exprimer le champ électrique en fonction de Q, ϵ_0, R, z, a et $\overrightarrow{e_z}$ (sans chercher à simplifier le résultat).



Réponses: 1- $\overrightarrow{E}(z)$ *selon* $\overrightarrow{e_z}$ *2-* $V(-z) = V(z)$ *et* $\overrightarrow{E}(-z) = -\overrightarrow{E}(z)$ *3-* $V(z) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)^{1/2}}$ *et* $\overrightarrow{E}(z) = \dfrac{Qz}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\overrightarrow{e_z}$

IV. **Simulation numérique**

Annexe pour comprendre la syntaxe:

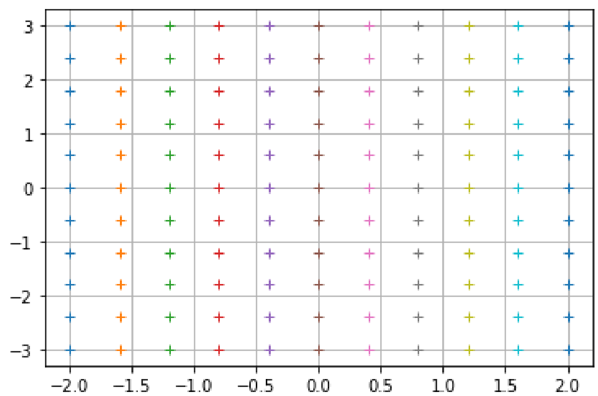
xx=np.linspace(-2,2,11) : crée un tableau 1D avec 11 éléments équirépartis entre -2 et $+2$

yy=np.linspace(-3,3,11) : crée un tableau 1D avec 11 éléments équirépartis entre -3 et $+3$

x,y=np.meshgrid(xx,yy) : crée un maillage 2D avec le tableau xx en abscisse et le tableau yy en ordonnées, soit un maillage avec des points dont l'abscisse est dans le tableau xx et dont l'ordonnée est dans le tableau yy

plt.plot(x,y,'+')

plt.show()



Soit deux charges q_1 et q_2 placées respectivement aux points $M_1(x_1, 0)$ et $M_2(x_2, 0)$. On donne le code suivant:

import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

1 e,epsilon0,K=1E-8,8.85E-12,1/(4*np.pi*epsilon0)

2 q1,q2=n*e,-e : n est un entier positif

3 x1,x2=....,....

4 x=np.linspace(....,.....,1000)

5 y=np.linspace(-.....,.....,1000)

6 X,Y=np.meshgrid(x,y)

7 A1=q1*K/((X-x1)**2+Y**2)**0.5

8 A2=q2*K/((X-x2)**2+Y**2)**0.5

9 A=A1+A2

10 plt.plot(x1,0,'o')

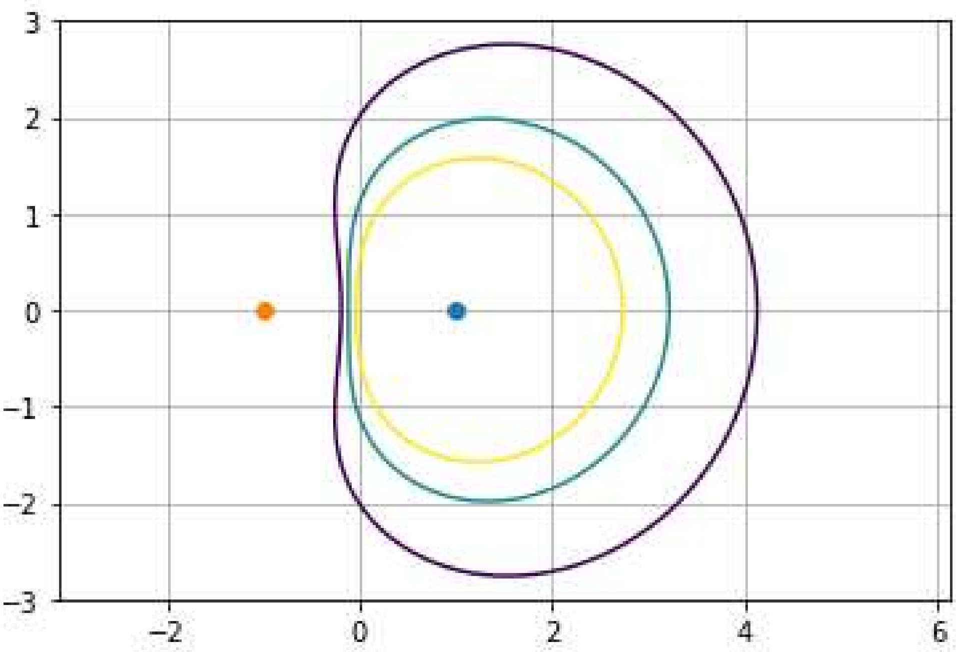
11 plt.plot(x2,0,'o')

12 plt.contour(X,Y,A,[40,60,80]) : permet de tracer les deux courbes correspondant à $A = 40$ et $A = 60$ et $A = 80$

13 plt.grid()

14 plt.show()

Le code précédent donne le graphe (les axes Ox et Oy sont gradués en mètre):



1. Que représentent $A1$, $A2$ et A? Compléter les lignes 4 et 5. Quel nom portent les 3 courbes tracées. Compléter la ligne 3 en justifiant votre réponse.

2. Déduire d'un calcul en vous appuyant sur l'une des courbes, la valeur numérique de n (ligne 2).

3. Tracer sur la courbe, l'allure du champ électrique aux deux points d'ordonnée $y = 0$ sur la courbe correspondant à $A = 60$ et aux deux points d'abscisse $x = 2$ sur la courbe sur la courbe $A = 80$. Evaluer la norme du champ électrique aux deux points d'ordonnée $y = 0$ sur la courbe correspondant à $A = 60$.

V. **Le gecko : interactions entre molécules polaires**

Données:

Permittivité du vide $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12}\ F.m^{-1}$

Constante de Boltzmann $k_B = 1,38.10^{-23}\ J.K^{-1}$

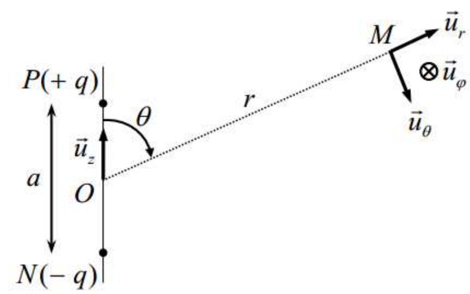
Intensité du champ de pesanteur $g = 9,8\ m.s^{-2}$

Définition du Debye $1\ D = 3,33.10^{-30}\ C.m$

$\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \dfrac{\partial U}{\partial r}\overrightarrow{U_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\overrightarrow{U_\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial U}{\partial \phi}\overrightarrow{U_\phi}$ en coordonnées sphériques

Le gecko est un petit lézard capable de se déplacer à des vitesses de plusieurs mètres par seconde sur les murs ou les plafonds de pratiquement toutes natures, dans presque toutes les conditions. Des expériences menées en 2002 par l'équipe de l'américain Kellar Autumn ont montré que la spectaculaire faculté d'adhésion de l'animal est uniquement due à des forces de Van der Waals. L'adhésion est possible grâce à l'anatomie particulière des coussinets des doigts du lézard. Ces derniers sont recouverts de poils microscopiques, les sétules, ramifiés en des centaines de branches terminées par une spatule pouvant s'approcher à quelques nanomètres de la surface de contact.

On considère une molécule polaire située dans le vide, modélisée par un dipôle électrique rigide de moment dipolaire électrique permanent $\overrightarrow{p_1} = p_1\overrightarrow{U_z}$. Le dipôle, centré en un point O, est constitué de deux charges ponctuelles opposées, $+q$ et $-q$(avec $q > 0$), situées sur l'axe (Oz) aux points respectifs P et N distants de $a = PN$. On repère tout point M de l'espace par ses coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) dans le repère $(O, \overrightarrow{U_r}, \overrightarrow{U_\theta}, \overrightarrow{U_\phi})$.

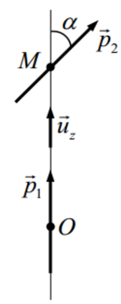


1. Expliquer, en prenant l'exemple de la molécule de chlorure d'hydrogène (HCl), l'origine du moment dipolaire permanent de certaines molécules. Donner l'expression en fonction de a et q du moment dipolaire électrique $\overrightarrow{p_1}$ de la molécule polaire.

2. Établir l'expression du potentiel électrostatique $V_1(M)$ créé en M par la molécule polaire dans le cadre de l'approximation dipolaire qu'on explicitera. On donnera le résultat en fonction de p_1, ϵ_0 et des coordonnées sphériques du point M.

3. En déduire que le champ électrostatique $\overrightarrow{E_1}(M)$ créé en M par la molécule polaire s'écrit en coordonnées sphériques $\overrightarrow{E_1}(M) = \dfrac{p_1}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\overrightarrow{U_r} + \sin\theta\overrightarrow{U_\theta})$.

Une seconde molécule polaire, modélisée par un dipôle rigide de moment dipolaire électrique permanent $\overrightarrow{p_2}$, est située au point M sur l'axe Oz tel que $\theta = 0$, à la distance r fixe du point O. À un instant donné, son moment dipolaire forme un angle α avec cet axe. Dans ces conditions, la molécule plongée dans le champ électrostatique dû à l'autre molécule située au point O subit un couple de forces de moment $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{p_2}\Lambda\overrightarrow{E_1}(M)$. On rappelle l'expression de l'énergie potentielle d'interaction des deux molécules $E_{12} = -\overrightarrow{p_2}.\overrightarrow{E_1}(M)$.



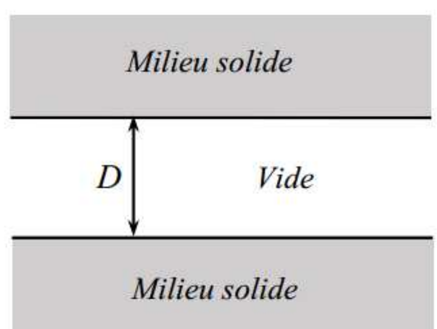
4. Quel est l'effet du couple de forces subi par la molécule fixée au point M ? Justifier l'orientation de son moment dipolaire électrique lorsqu'elle est en équilibre stable. Les deux molécules sont supposées identiques, de moments dipolaires électriques de même valeur $p_1 = p_2 = p = 1\ D$.

5. Estimer l'énergie potentielle d'interaction des deux molécules, distantes de $r = 0,5\ nm$, en supposant leurs moments dipolaires électriques alignés. Comparer cette énergie à l'énergie d'agitation thermique qui est de l'ordre de k_BT où kB est la constante de Boltzmann, à la température ambiante $T = 293\ K$. Conclure.

6. Du fait de l'agitation thermique, on doit considérer l'énergie potentielle d'interaction moyenne entre deux dipôles situés à une distance r dont les orientations relatives sont sujettes à des variations aléatoires. À température suffisamment élevée, on montre que cette énergie potentielle d'interaction moyenne est de la forme : $< E_{12} >= \dfrac{-C_k}{r^6}$ où $C_k = \dfrac{1}{k_BT}(\dfrac{p^2}{2\pi\epsilon_0})^2$.

Donner un ordre de grandeur de C_k à la température ambiante $T = 293\ K$. Vérifier que la force $\overrightarrow{F_{1/2}}$ qui dérive de cette énergie potentielle est attractive. On rappelle que $\overrightarrow{F_{1/2}} = -\overrightarrow{\text{grad}} < E_{12} >$.

La force, calculée à la question précédente, correspond à une interaction de Van der Waals entre molécules polaires. Si on considère maintenant deux plans infinis parallèles, distants de D et séparant chacun un milieu solide, on montre en prenant en compte l'ensemble des interactions de Van der Waals que la force surfacique entre les deux milieux s'écrit $f(D) = \dfrac{A}{6\pi D^3}$. La constante A, appelée constante de Hamaker, dépend de la nature des interactions de Van der Waals et des densités moléculaires des deux solides en interaction.



7. Vérifier que la constante de Hamaker A est homogène à une énergie.

8. Un gecko de masse $m = 50\ g$ est suspendu par ses quatre pattes au plafond. Le gecko possède au total 6 millions de sétules, comportant chacune en moyenne 500 spatules. En modélisant une spatule par une surface carrée de $0,2\ \mu m$ de côté située à une distance $D = 1\ nm$ du plafond, estimer le pourcentage de sétules utilisées par le gecko pour soutenir sa masse. On prendra $A = 10^{-19}\ J$ et on négligera tout effet de bord.