

# TD théorème de Gauss

## I. Champ créé par un fil

Soit un cylindre d'axe  $Oz$ , de rayon négligeable, de longueur  $l$  très grande et portant une charge totale  $Q$  uniformément répartie. Déterminer le champ électrique créé par ce cylindre par application du théorème de Gauss.

Réponse:  $E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r l}$

## II. Champ créé par un cylindre chargé en surface

Soit un cylindre de rayon  $R$ , d'axe  $Oz$  et de hauteur  $h$  portant une charge totale  $Q$  uniformément répartie sur sa surface. Il n'y a pas de charge dans le volume du cylindre. On néglige les effets de bord soit  $h \gg R$ .

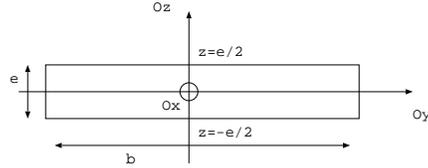
1. Dédurre du théorème de Gauss les expressions de  $\vec{E}_+(M)$  et  $\vec{E}_-(M)$ , champ électrique en  $M$  qui se trouve respectivement à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre. Tracer la courbe donnant le champ électrique en fonction de  $r$  et commenter.

2. Déterminer les expressions du potentiel électrique  $V_+(M)$  et  $V_-(M)$  en  $M$  qui se trouve respectivement à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre. On suppose que le potentiel est égal à  $V_0$  au centre du cylindre, sur l'axe  $Oz$ .

Réponses :  $\vec{E}_+(M) = \vec{0}$  et  $\vec{E}_-(M) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h} \vec{e}_r$ ,  $V_+(M) = V_0$  et  $V_-(M) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{r}{R}\right) + V_0$ .

## III. Champ créé par un parallélépipède

Soit un parallélépipède de dimensions  $a$  selon  $Ox$ ,  $b$  selon  $Oy$  et  $e$  selon  $Oz$  qui porte une charge  $+Q$  uniformément répartie. On suppose que ce parallélépipède est très grand selon  $Ox$  et  $Oy$  soit  $a, b \gg e$ . La densité volumique de charges est une fonction de  $z$  telle que  $\rho(z) = 0$  pour  $z > e/2$  et  $z < -e/2$  et  $\rho(z) = \rho_0$  (constante) pour  $-e/2 < z < +e/2$ .

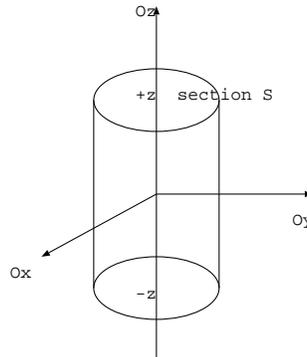


1. Montrer que le champ électrique en  $M$  s'écrit  $\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z$ . Quelle relation a-t-on entre  $\vec{E}(z)$  et  $\vec{E}(-z)$ ?

2. On choisit pour surface de Gauss un cylindre d'axe  $Oz$  de section  $S$  compris entre  $-z$  et  $+z$ . Exprimer le flux du champ électrique à travers ce cylindre.

3. Dédurre du théorème de Gauss, le champ électrique en tout point de l'espace et tracer la courbe donnant  $E$  en fonction de  $z$ .

4. Exprimer le potentiel créé par cette distribution de charges en prenant  $V(z = 0) = 0$ .



Réponses:  $E(z) = \frac{\rho_0 z}{\epsilon_0}$  et  $V(z) = -\frac{\rho_0 z^2}{2\epsilon_0}$  pour  $-e/2 < z < e/2$ ,  $E(z) = \frac{\rho_0 e}{2\epsilon_0}$  et  $V(z) = -\frac{\rho_0 e z}{2\epsilon_0}$  pour  $z > e/2$   
 et  $E(z) = \frac{-\rho_0 e}{2\epsilon_0}$  et  $V(z) = \frac{+\rho_0 e z}{2\epsilon_0}$  pour  $z < -e/2$

## IV. Equation de Poisson

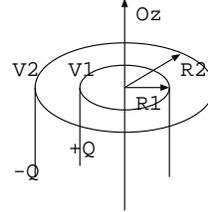
Une sphère de rayon  $R$  et de centre  $O$  porte une densité volumique de charges uniforme  $\rho_0$ . Le potentiel électrique est nul loin de la sphère et vaut  $V_0$  au centre de la sphère. Rappeler les équations de Maxwell Faraday et de Maxwell Gauss et en déduire l'équation de Poisson. Montrer que le potentiel ne dépend que de  $r$  en coordonnées sphériques et exprimer le potentiel en tout point  $M$ . En déduire le champ électrique.

$$\text{Donnée: } \Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rV) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}.$$

$$\text{Réponses: } V(r < R) = -\frac{\rho_0 r^2}{6\epsilon_0} + V_0 \text{ et } V(r > R) = \frac{-\rho_0 R^3}{6\epsilon_0 r} + \frac{V_0 R}{r}$$

## V. Condensateur cylindrique

On considère deux électrodes (ou armatures) cylindriques de même axe  $Oz$  et de rayon respectif  $R_1$  et  $R_2$  (de longueur  $l \gg R_1, R_2$ ) portant les charges  $+Q > 0$  et  $-Q$  réparties uniformément en surface. L'électrode de rayon  $R_1$  a pour potentiel  $V_1$  et l'électrode de rayon  $R_2 > R_1$  a pour potentiel  $V_2$ .



1. Soit un point  $M$  repéré par ses coordonnées cylindriques. Faire un schéma pour représenter  $M$ , ses coordonnées et les vecteurs de base. Montrer que le champ électrique en  $M$  est de la forme  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$ .
2. On choisit pour surface de Gauss, un cylindre d'axe  $Oz$  et de rayon  $r = HM$ . Exprimer le flux du champ électrique à travers ce cylindre.
3. En déduire le champ électrique pour  $R_1 < r < R_2$  puis la différence de potentiel  $V_1 - V_2$  en fonction de  $Q, l, \epsilon_0, R_1$  et  $R_2$ .
4. Ce système constitue un condensateur cylindrique. Rappeler la relation entre sa capacité  $C$ , la charge  $+Q$  et la tension à ses bornes  $U = V_1 - V_2$ . Déduire des questions précédentes l'expression de la capacité de ce condensateur.
5. En tout point  $M$  où règne un champ électrique, il existe une énergie électrique dont l'expression *par unité de volume* est donnée par :  $u_e(M) = \frac{\epsilon_0 E^2(M)}{2}$ . Exprimer l'énergie électrique totale  $U_e$  entre les cylindre de rayons  $R_1$  et  $R_2$ .

Rappeler l'expression de l'énergie stockée dans un condensateur en fonction de la charge  $Q$  des armatures et de sa capacité  $C$ . En déduire l'expression de la capacité du condensateur cylindrique. Vérifier la cohérence avec le résultat précédent.

$$\text{Réponse: } C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

## VI. Répartition non uniforme de charges

Soit une sphère de rayon  $a_0$  et de centre  $O$  qui porte la densité volumique de charges  $\rho(r) = \rho_0\left(1 - \frac{r}{a_0}\right)$  où  $\rho_0$  est une constante positive. Il n'y a pas de charges à l'extérieur de la sphère.

1. Exprimer la charge totale de la sphère.
2. Déduire des symétries et des invariances que le champ électrique s'écrit  $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$ .
3. Déduire de l'équation de Maxwell-Gauss, le champ électrique pour  $r < a_0$  et pour  $r > a_0$ . On rappelle que le champ électrique est continu lorsque les charges sont réparties dans des volumes.

$$\text{On donne en coordonnées sphériques : } \text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\phi)}{\partial \phi}$$

4. Retrouver les résultats en utilisant le théorème de Gauss.

$$\text{Réponses: } Q = \frac{\rho_0 \pi a_0^3}{3}, E(r) = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \left(1 - \frac{3r}{4a_0}\right) \text{ pour } r < a_0 \text{ et } E(r) = \frac{\rho_0 a_0^3}{12\epsilon_0 r^2} \text{ pour } r > a_0$$

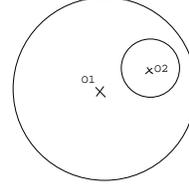
## VII. Symétrie sphérique

1. Une sphère de centre  $O$  et de rayon  $b$  contient des charges positives réparties uniformément en volume.  $Q$  est la charge totale de la distribution. Déterminer la direction et les variables du champ électrique par des considérations de symétrie et d'invariance. Déterminer, en utilisant l'équation de Maxwell Gauss, les expressions  $\vec{E}_+(M)$  et  $\vec{E}_-(M)$  du vecteur champ électrostatique lorsque  $M$  se trouve respectivement à l'extérieur et à l'intérieur de la sphère, à la distance  $r$  de son centre  $O$ .

On donne en coordonnées sphériques :  $\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\phi)}{\partial \phi}$

2. Application 1 :

Une boule  $B$  de centre  $O_1$  est creusée d'une cavité sphérique de centre  $O_2$ . Elle est chargée d'une densité de charge  $\rho$  uniforme, exception faite de la cavité sphérique qui est vide de charge. On appelle  $\mathcal{D}$  cette distribution de charge



2.a. On considère la distribution  $\mathcal{D}_1$  constituée par la boule pleine de centre  $O_1$  et chargée avec la densité volumique  $\rho$ . Quelle distribution  $\mathcal{D}_2$  faut-il lui superposer pour retrouver la distribution  $\mathcal{D}$ ?

2.b. En déduire le champ que le champ électrique créé par  $\mathcal{D}$  dans la cavité est  $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_1 O_2}$ .

3. Application 2 : Dans le modèle proposé par Thomson, l'électron de l'atome d'hydrogène est modélisé par une charge ponctuelle  $-e$ , assimilée à un point matériel  $M$  de masse  $m$ , et le noyau est modélisé par une charge  $+e$  répartie uniformément dans une sphère de rayon  $a$  et de centre  $O$ . On suppose que la trajectoire de l'électron reste confinée à l'intérieur de cette sphère.

Données :  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ ,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

3.a. Exprimer le champ électrique  $\vec{E}$  créé par le noyau en  $M$  à l'intérieur de la sphère en fonction de  $e$ ,  $a$  et  $\overrightarrow{OM}$ .

3.b. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $\overrightarrow{OM}$ . On suppose le référentiel d'étude galiléen et on néglige le poids de l'électron devant la force électrique.

3.c. Exprimer la fréquence  $f_0$  des oscillations de l'électron au tour du centre du noyau. La plus petite fréquence observée étant  $f_m = 460 \text{ Thz}$ , calculer  $a_{max}$ .

Réponses :  $\vec{E}_- = \frac{Q}{4\pi b^3 \epsilon_0} \overrightarrow{OM} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{OM}$  et  $\vec{E}_+ = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \vec{e}_r$ ,  $f_0 = \sqrt{\frac{e^2}{16\pi^2 m \epsilon_0 a^3}}$

## VIII. Champ de gravitation

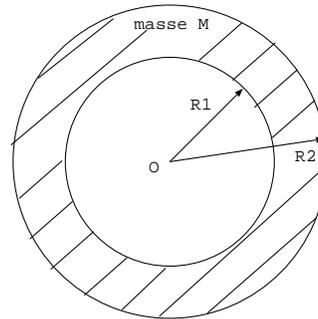
1. Rappeler les analogies formelles que l'on peut faire entre électrostatique et gravitation et en déduire le théorème de Gauss pour la gravitation.

2. On considère une planète de masse  $M$  répartie uniformément entre deux sphères de rayons  $R_1$  et  $R_2$ .

2.a. Exprimer la masse volumique  $\rho_0$  en un point  $M$  tel que  $R_1 < r < R_2$ .

2.b. Montrer que le champ de gravitation se met sous la forme  $\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(r) \vec{e}_r$ .

2.c. Déduire du théorème de Gauss, les expressions du champ de gravitation pour  $r < R_1$ ,  $R_1 < r < R_2$  et  $r > R_2$ .



Réponses: pour  $r < R_1$ :  $\vec{\mathcal{G}}(M) = \vec{0}$ , pour  $R_1 < r < R_2$ :  $\vec{\mathcal{G}}(M) = \frac{-GM}{r^2} \left( \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} \right) \vec{e}_r$ , pour  $r > R_2$ :

$\vec{\mathcal{G}}(M) = \frac{-GM}{r^2} \vec{e}_r$

## IX. Polarisabilité électronique d'un atome

Dans un atome le noyau de charge  $+Ze$  est assimilé à un point noté  $P$ . Les électrons constituent un nuage électronique modélisé par une sphère de centre  $N$ , de rayon  $a$  et de charge  $-Ze$ , uniformément répartie. On note  $\rho$  la densité volumique de charge du nuage électronique.

1. Exprimer le champ électrique créé par le nuage électronique en un point  $M$  à l'intérieur du nuage (soit pour  $NM = r < a$ ).

En absence de champ électrique extérieur,  $N$  et  $P$  sont superposés. Et quand on applique un champ électrique extérieur  $\vec{E}_0$ , le nuage électronique se déplace et le noyau reste immobile:  $N$  et  $P$  sont donc distants de  $d = NP$ . Il apparaît alors un dipôle induit de moment  $\vec{p} = ZeN\vec{P}$ .

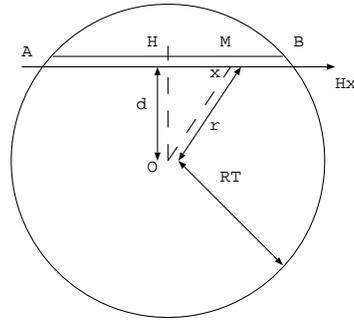
2. Ecrire l'équilibre du noyau (soumis au champ électrique extérieur et au champ électrique créé par le nuage électronique), en déduire l'expression de  $N\vec{P}$  puis l'expression du moment dipolaire induit sous la forme  $\vec{p} = \alpha\epsilon_0\vec{E}_0$ . Exprimer  $\alpha$ , appelé polarisabilité électronique.

3. Donner un ordre de grandeur de la distance  $NP$  dans un atome d'hélium soumis à un champ électrique d'intensité  $10^4 \text{ V/m}$  avec  $\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ .

Réponses :  $\vec{E}(P) = -\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 a^3} N\vec{P}$ ,  $\alpha = 4\pi a^3$ ,  $NP$  de l'ordre de  $10^{-19} \text{ m}$

## X. Tunnel creusé dans la Terre

La terre de rayon  $R$  est supposée homogène et le référentiel terrestre est galiléen. Un tunnel rectiligne la traverse intégralement dans un plan méridien (on suppose que ce tunnel ne modifie pas la répartition de masse homogène à symétrie sphérique). On note  $M_T$  et  $R_T$  la masse et le rayon de la Terre.



1. Déterminer, par application du théorème de Gauss appliqué à la gravitation, le champ de gravitation en tout point  $M$  de masse  $m$  situé à l'intérieur de la Terre. En déduire la force d'attraction terrestre en un point  $M$  de masse  $m$  situé à une distance  $r < R_T$  du centre de la Terre.

2. Un véhicule assimilé à un point matériel  $M$  de masse  $m$  glisse sans frottement dans le tunnel. Montrer que ce point matériel constitue un système conservatif et exprimer son énergie potentielle en fonction de  $m$ ,  $g_0$ ,  $x = \overline{HM}$  et  $R_T$ .

3.  $M$  part du point  $A$  de la surface terrestre sans vitesse initiale.

3.a. Quelle est sa vitesse maximale  $V_m$  au cours du mouvement? A.N. avec  $d = 5\,000 \text{ km}$ .

3.b. Montrer par une méthode énergétique que  $x = \overline{HM}$  vérifie l'équation d'un oscillateur mécanique. Retrouver l'expression de la vitesse maximale. Calculer le temps que met  $M$  pour parcourir le tunnel entier de  $A$  à  $B$ . Que devient ce temps lorsqu'on change la valeur de  $d$ .

Réponses: 1-  $\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{mM_T r}{R_T^3} \vec{e}_r = -\frac{g_0 m r}{R_T} \vec{e}_r$