Etape 2 du théorème : on choisit pour surface de Gauss une sphère de centre O et de rayon $r = OM$ (attention la sphère de Gauss n'est pas la sphère avec les charges, elles ont un centre mais pas un rayon)

$\vec{n}(M) = \vec{e_r}$

$$\underbrace{\Phi}_{\text{c'est le flux du champ électrique à travers la sphère de rayon } r} = \oint\!\!\oint \vec{E}(M)\, dS(M)\, \vec{n}(M) \quad \text{avec} \quad \vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e_r}, \quad \vec{n}(M) = \vec{e_r}$$

d'où $\Phi = \oint\!\!\oint E(r)\, dS = \underbrace{E(r)}_{} \oint\!\!\oint dS = E(r) \times 4\pi r^2$

on ne cherche pas à exprimer dS, on voit d'abord si on peut sortir E(r) de l'intégrale

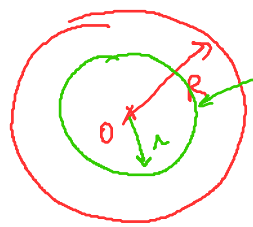
M est sur la sphère donc r = cte

Etape 3 du théorème : on applique le théorème de Gauss : $\Phi = \oint\!\!\oint \vec{E}(M)\, dS(M)\, \vec{n}(M) = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

il faut distinguer deux cas : $r < R$ et $r > R$

cas où $r < R$:

sphère de rayon R qui porte la charge totale +Q



sphère de Gauss de rayon r, il faut calculer la charge Q_{int} dans cette sphère

$Q_{int} = \rho_0 \times \dfrac{4}{3}\pi r^3$ avec $\rho_0 = \dfrac{+Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

soit $Q_{int} = Q \dfrac{r^3}{R^3}$

d'où $\Phi = E(r)\, 4\pi r^2 = \dfrac{\rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}$ soit

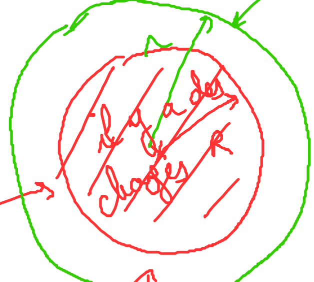
$$\boxed{E(r) = \frac{\rho_0\, r}{3\varepsilon_0}}$$

← expression en fonction de ρ_0

$$\boxed{E(r) = \frac{Q\, r}{4\pi \varepsilon_0 R^3}}$$

← expression en fonction de Q

cas où $r > R$



sphère de Gauss de rayon r, il faut calculer Q_{int} dans cette sphère

sphère de charge +Q

ici c'est vide !!

$Q_{int} = +Q$

soit $\Phi = E(r)\, 4\pi r^2 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

d'où

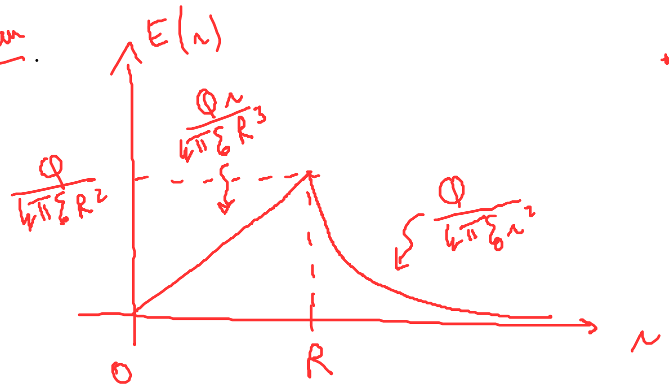
$$\boxed{E(r) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}}$$

← expression en fonction de Q

$$\boxed{E(r) = \frac{\rho_0 R^3}{3 \varepsilon_0 r^2}}$$

← expression en fonction de ρ_0

Bilan.



* le champ électrique est continu en $r=R$
* pour $r>R$: $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$: c'est le même champ que celui créé par une charge ponctuelle $+Q$ placée en O

On en déduit le potentiel : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\dfrac{dV}{dr}\hat{e}_r$ soit $\dfrac{dV}{dr} = -E(r)$

$r<R$: $E = \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ donc $\dfrac{dV}{dr} = -\dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ et $V(r) = -\dfrac{Qr^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} + A$

$r>R$: $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ donc $\dfrac{dV}{dr} = -\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ et $V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + B$

on trouve A et B en écrivant que $V \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (loin des charges)

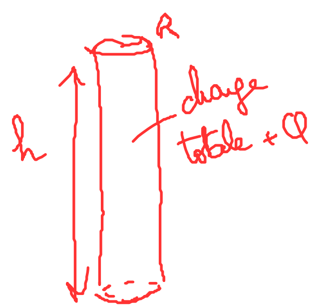
et V est continu

$V(r\to\infty) = 0 \Rightarrow B = 0$

$V(r=R^-) = V(r=R^+) \Rightarrow \dfrac{-QR^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} + A = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow A = 2\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

IV) Champ et potentiel créés par un cylindre infini uniformément chargé en volume

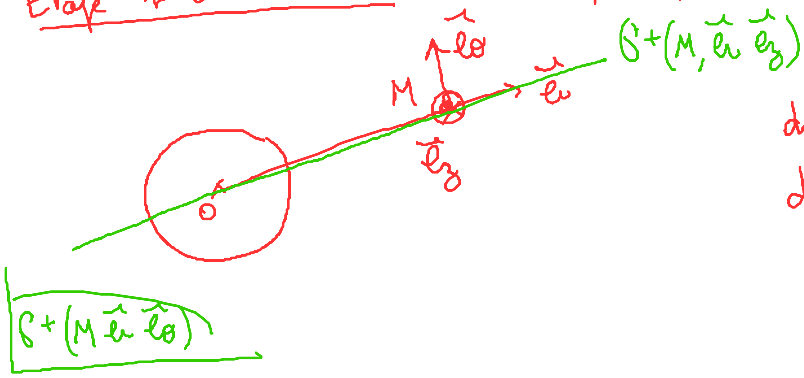
Situation :



$\rho(r<R) = \rho_0 = \dfrac{Q}{\pi R^2 h}$ les charges sont dans le cylindre

$\rho(r>R) = 0$ les charges sont nulles à l'extérieur du cylindre

Etape 1 du théorème : M est repéré par ses coordonnées cylindriques



$M \in \delta^+(M\, \underline{\hat{e}_r}\, \hat{e}_z)$ et $\delta^+(M\, \underline{\hat{e}_r}\, \hat{e}_\theta)$

donc $\vec{E}(M) \in$ à ces 2 plans

donc $\vec{E}(M)$ selon $\hat{e}_r$

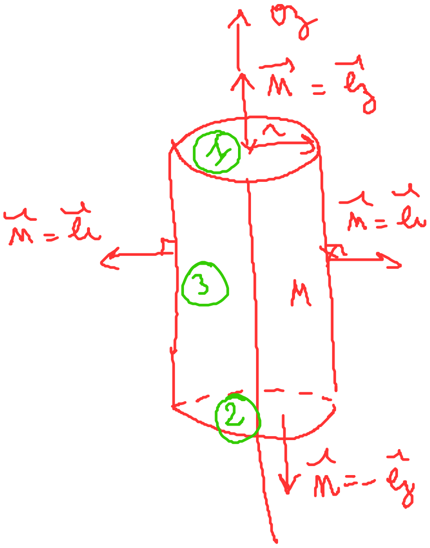
$$\|\vec{E}(M)\| = \|\vec{E}(r, \cancel{\theta}, \cancel{z})\|$$

invariance par rotation autour de (Oz)
quand le cylindre tourne autour de (Oz), le point M voit toujours la même chose

↳ invariance par translation selon Oz
le cylindre est ∞ donc quand on le déplace selon (Oz), le point M ne voit pas de changement

donc $\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\,\hat{e}_r}$

Étape 2 du théorème : on choisit pour la surface de Gauss un cylindre de rayon r et de hauteur h (attention le cylindre de Gauss n'a pas le même rayon que le cylindre de charges)



$$\phi = \oiint \vec{E}(M)\, dS(M)\, \hat{n}(M)$$

il y a 3 expressions pour $\hat{n}$, donc on décompose le cylindre en 3 surfaces

$$= \iint_{S_1} \underbrace{E(r)\hat{e}_r\, dS \times \vec{e}_z}_{=0} + \iint_{S_2} \underbrace{E(r)\hat{e}_r\, dS(-\hat{e}_z)}_{=0} + \iint_{S_3} E(r)\hat{e}_r \times dS\, \hat{e}_r$$

$$= \iint_{S_3} E(r)\, dS = E(r) \iint_{S_3} S = E(r) \times \underbrace{S_3}_{= 2\pi r h}$$

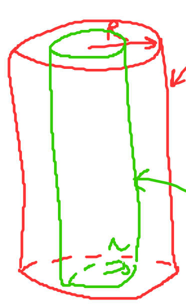
r = cste sur la surface latérale donc $E(r)$ = cste

(surface latérale du cylindre)

d'où $\phi = E(r)\, 2\pi r h$

Étape 3 du théorème : on applique le théorème de Gauss $\phi = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon}$, on distingue deux cas : $r < R$ et $r > R$

Cas où $r < R$



cylindre qui contient la charge Q

cylindre de Gauss qui contient la charge Q_{int} à calculer

$$Q_{int} = \rho_0 \times \pi r^2 h \quad \text{avec} \quad \rho_0 = \frac{Q}{\pi R^2 h}$$

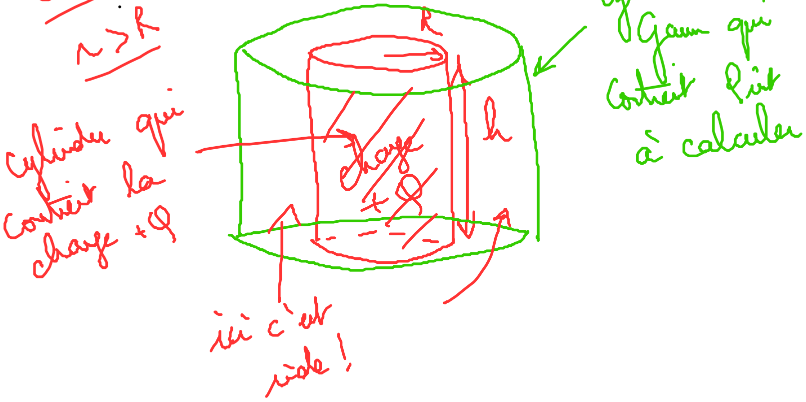
$$= Q\frac{r^2}{R^2}$$

$$\phi = E(r)\, 2\pi r h = \frac{\rho_0 \pi r^2 h}{\varepsilon}$$

soit $\boxed{E(r) = \dfrac{\rho_0 r}{2\varepsilon}}$ ← expression en fonction de ρ_0

$\boxed{E(r) = \dfrac{Q r}{2\pi R^2 \varepsilon h}}$ ← expression en fonction de Q

Cas où $r > R$



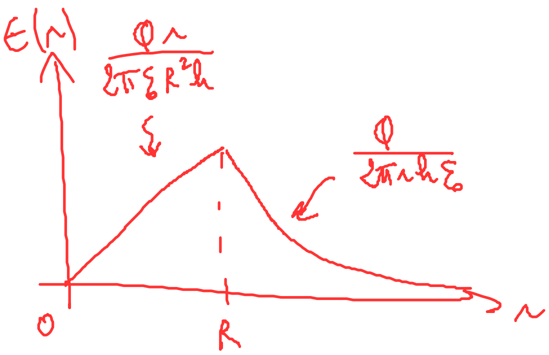
$Q_{int} = Q$

$$\Phi = E(r)\, 2\pi r h = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

soit $\boxed{E(r) = \dfrac{Q}{2\pi r h \varepsilon_0}}$ ← expression en fonction de Q

$\boxed{E(r) = \dfrac{\rho_0 \pi R^2 \cancel{h}}{2\pi r \cancel{h} \varepsilon_0}}$ ← expression en fonction de ρ_0

Bilan



* E est continu

On en déduit le potentiel : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{dV}{dr}\vec{u_r}$ soit $\frac{dV}{dr} = -E(r)$

pour $r < R$: $\frac{dV}{dr} = -\frac{Q r}{2\pi \varepsilon_0 R^2 h}$ soit $V(r) = -\frac{Q r^2}{4\pi \varepsilon_0 R^2 h} + A$

pour $r > R$: $\frac{dV}{dr} = -\frac{Q}{2\pi r h \varepsilon_0}$ soit $V(r) = -\frac{Q}{2\pi h \varepsilon_0} \ln r + B$

ici on ne peut pas faire $V \to 0$ quand $r \to \infty$

V est continu : $V(r = R^-) = V(r = R^+)$

$$-\frac{Q R^2}{4\pi \varepsilon_0 R^2 h} + A = -\frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 h} \ln R + B$$