Chapitre EM 2 : théorème de Gauss et applications

I. Densité volumique de charges

Les charges sont réparties dans des volumes (noyau, atome, molécules, armatures d'un condensateur,...). On définit ρ, la densité volumique de charges par:

où dq est la charge contenue dans le volume élémentaire $d\tau$ au point M

$$\rho(M) = \frac{dq(M)}{d\tau(M)}$$

ρ est un nombre positif ou négatif d'unité: $[\rho] = C.m^{-3}$

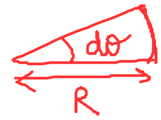
Quand ρ est donnée on peut calculer la charge contenue dans un volume:

(on découpe le volume en petit élément de volume $d\tau$)

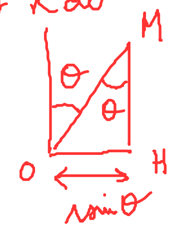
$$Q = \iiint_{volume} dq(M) = \iiint_{volume} \rho(M)\, d\tau(M)$$

Au sujet des volumes élémentaires:

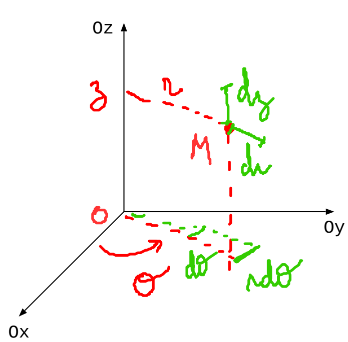
En coordonnées cartésiennes, le volume élémentaire s'écrit: Rq



← la longueur de l'arc de cercle (c'est quasiment un segment) est $R\,d\theta$



Coordonnées cylindriques

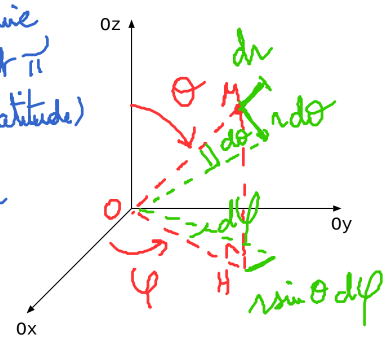


$$d\tau = dr \times dz \times r\,d\theta$$

Coordonnées sphériques

⚠ θ ne varie qu'entre 0 et π (comme la latitude)

⚠ φ varie de 0 à 2π (comme la longitude)



$$d\tau = dr \times r\,d\theta \times r \sin\theta\, d\varphi$$

Au sujet des volumes:

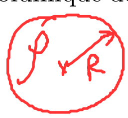
Volume d'une sphère de rayon R: $\frac{4}{3}\pi R^3$

Volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h: $\pi R^2 \times h$

dans ce cas : $\rho = \frac{Q}{V}$ ou $Q = \rho \times V$

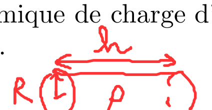
Cas particuliers très fréquents : la charge est uniformément répartie dans un volume, ce qui signifie que ρ est une constante. Exemples de calculs demandés en exercice:

Exprimer la densité volumique de charge pour une sphère de rayon R et de charge $+Q$ uniformément répartie dans son volume.



$$Q = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

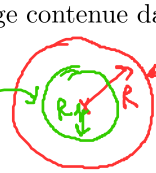
Exprimer la densité volumique de charge d'un cylindre de R, de hauteur h et de charge $+Q$ uniformément répartie dans son volume.



$$Q = \rho \times \pi R^2 h \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{Q}{\pi R^2 h}$$

Soit une sphère de centre O, de rayon R et de charge $+Q$ uniformément répartie dans son volume. Exprimer la charge contenue dans la sphère de centre O et de rayon $R_1 < R$.

charge Q_1 ?



charge totale $+Q$

$$\rho = \frac{+Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \text{et} \quad Q_1 = \rho \frac{4}{3}\pi R_1^3$$

autre façon de l'écrire:

$$\left.\begin{array}{l} Q \longleftrightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 \\ Q_1 \longleftrightarrow \frac{4}{3}\pi R_1^3 \end{array}\right\} \rightarrow Q_1 = Q\,\frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

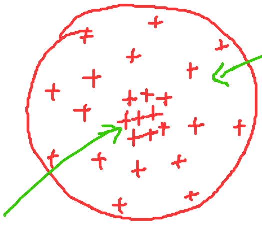
prenons $\rho_0 > 0$

Exercice : soit une sphère de rayon a_0 de densité volumique de charges $\rho(r) = \rho_0(1 - \frac{r}{a_0})$ en coordonnées sphériques. Calculer la charge totale contenue dans cette sphère.

$\rho(r=0) = \rho_0$

$\rho(r=a_0) = 0$

$\rho \downarrow$ quand $r \uparrow$



En $r \simeq a_0$
$\rho \simeq 0$
(les charges + sont éloignées peu nombreuses)

En $r \simeq 0$
$\rho = \rho_0$ grand
(les charges + sont nombreuses et proches)

en coord. sphériques $d\tau = dr \times r\,d\theta \times r\sin\theta\,d\varphi$

$$Q = \iiint \rho(M)\,d\tau$$

$$= \iiint \rho_0\left(1 - \frac{r}{a_0}\right) r^2 dr \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$$

$$= \rho_0 \int_0^{a_0}\left(r^2 - \frac{r^3}{a_0}\right)dr \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \rho_0\left(\frac{a_0^3}{3} - \frac{a_0^4}{4a_0}\right)\underbrace{\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}}_{=2} 2\pi = 4\pi\rho_0 a_0^3 \frac{1}{12}$$

II. Théorème de Gauss

On admet que le champ électrique vérifie les équations locales:

(1) $\mathrm{div}\,\vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$ (On a vu qu'une charge + crée un champ divergent et une charge − crée un champ convergent)

(2) $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}(M) = \vec{0}$ (le champ électrique ne "tourne" pas) $\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}\,V}$

(1) conduit au théorème de Gauss.

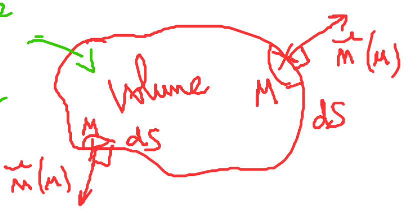
Énoncé du théorème : le flux sortant du champ électrique à travers une surface fermée est égale à la charge intérieure contenue dans le volume délimité par la surface divisée par ε_0.

mathématiquement le théorème s'écrit : $\oiint \vec{E}(M)\,dS(M)\,\vec{n}(M) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

le rond désigne une surface fermée = surface qui délimite un volume

vecteur unitaire normal à la surface en M et dirigé vers l'extérieur car on calcule le flux sortant

Q_{int} = charge totale du volume



Méthode d'application: le théorème de Gauss sert à trouver le champ électrique créé par une distribution de charges à forte symétrie (sphère, cylindre infini et parallélépipède infini). Il s'applique en trois étapes:

Etape 1 : On choisit, pour repérer M, un système de coordonnées sphériques, cylindriques ou cartésiennes, adapté aux symétries de la distribution

On prévoit la direction du champ électrique grâce aux plans de symétrie présents.

On prévoit les variables du champ électrique grâce aux invariances présentes.

Etape 2 : On choisit une surface de Gauss qui passe par M et qui respecte les symétries (concrètement cette surface doit être perpendiculaire à $\vec{E}$ ou tangente à $\vec{E}$ en tout point).

On calcule le flux sortant du champ électrique à travers la surface de Gauss.

Etape 3 : On calcule la charge intérieure contenue dans la surface de Gauss, on est souvent amené à considérer deux cas suivant que M est à l'extérieur ou à l'intérieur du volume qui contient les charges. On **fait** un dessin pour visualiser les charges présentes et les charges intérieures à la surface de Gauss.

On applique le théorème. On déduit le potentiel de l'équation locale $\vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}V$. On trouve les constantes d'intégration en écrivant que le potentiel est **continu** et que loin des charges le potentiel est nul.

La suite du chapitre est consacrée à la détermination du champ électrique et du potentiel électrique par application du théorème de Gauss pour les distributions de charges suivantes:

- Une sphère de centre O, de rayon R, de charge Q, chargée uniformément en volume
- Une sphère de centre O, de rayon R, de charge Q, chargée uniformément en surface
- Un cylindre de rayon R, d'axe Oz et de longueur $l >> R$ (ce cylindre est considéré de longueur infini), de charge Q uniformément chargé en volume
- Un parallélépipède de section S compris entre les plans $z = -e/2$ et $z = e/2$ chargé uniformément en volume

III) Champ et potentiel créés par une sphère uniformément chargée en volume.

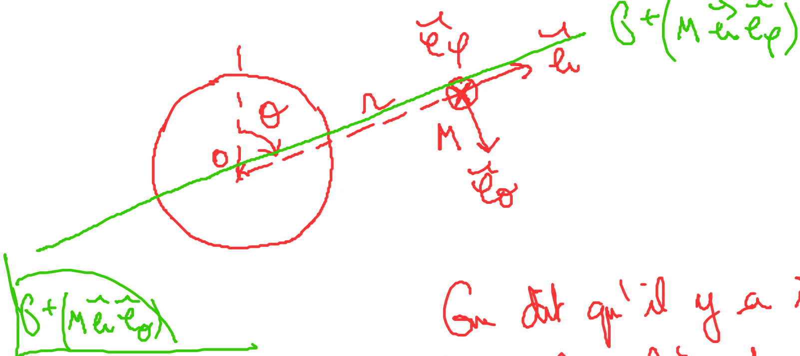
Situation :

$\rho(r<R) = \rho_0$ il y a des charges dans la sphère

$\rho(r>R) = 0$ il n'y a pas de charges à l'extérieur de la sphère

$\rho_0 = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

Etape 1 du théorème : on repère le point M par ses coordonnées sphériques $M(r,\theta,\varphi)$ avec pour vecteur de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$



$M \in P^+(M\,\vec{e}_r\,\vec{e}_\varphi)$ et $P^+(M\,\vec{e}_r\,\vec{e}_\theta)$

donc $\vec{E}(M) \in$ à ces 2 plans

donc $\vec{E}(M)$ est selon $\vec{e}_r$

On dit qu'il y a invariance par rotation autour de O (quand on tourne la sphère de charges autour de O, le point M "voit" toujours la même chose) donc :

$$\|\vec{E}(M)\| = \|\vec{E}(r, \cancel{\theta}, \cancel{\varphi})\|$$

invariance par rotation autour de O

quand on tourne autour de O ça change θ et φ donc θ et φ n'interviennent pas

d'où $\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e}_r}$

Rq : a priori le champ électrique s'écrivait :

$$\vec{E} = E_r(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_r + E_\theta(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_\theta + E_\varphi(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_\varphi$$

grâce aux invariances on voit que les variables θ et φ n'interviennent pas

grâce aux symétries E_θ et E_φ sont nulles