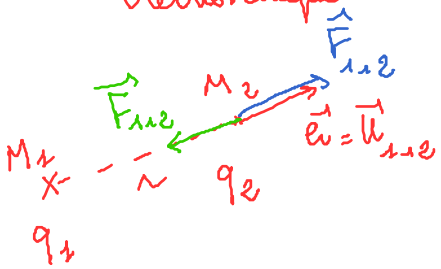
# VII) Analogie avec la gravitation.

Electrostatique




$\vec{F}_{1\to 2}$ pour $q_1 q_2 > 0$ : interaction répulsive pour des charges de même signe

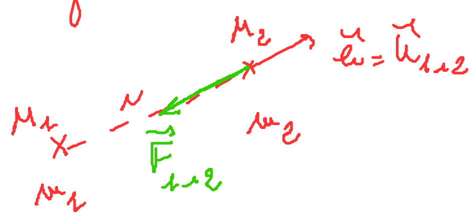
$\vec{F}_{1\to 2}$ pour $q_1 q_2 < 0$ : interaction attractive pour des charges de signes opposés

$$\vec{F}_{1\to 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 r^2}\vec{u_r} = q_2 \vec{E}_1(M_2)$$

$\varepsilon_0$ : permittivité du vide

$\vec{E}_1(M_2)$ : champ électrique créé par $q_1$ en $M_2$

Gravitation




l'interaction gravitationnelle est toujours attractive

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u_r} = m_2 \vec{g}_1(M_2)$$

$\mathcal{G} = 6{,}67.10^{-11}$ SI : cste de gravitation universelle

$\vec{g}_1(M_2)$ : champ de gravitation créé par la masse $m_1$ au point $M_2$

(équivalent à)

| | | |
|---|---|---|
| charge $q$ | $\longleftrightarrow$ | masse $m$ |
| champ électrique $\vec{E}(M)$ | $\longleftrightarrow$ | champ gravitationnel $\vec{g}(M)$ |
| constante $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ | $\longleftrightarrow$ | $-\mathcal{G}$ |
| densité volumique de charge $\rho$ | $\longleftrightarrow$ | masse volumique $\rho$ |

On a trouvé ces équivalents en comparant les expressions des forces électrique et gravitationnelle. On peut déduire de ces équivalents :

* le th. de Gauss : $\displaystyle\oiint \vec{E}(M)\, dS(M)\, \vec{n}(M) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

donne $\displaystyle\oiint \vec{g}(M)\, dS(M)\, \vec{n}(M) = M_{int} \times (-4\pi \mathcal{G})$

* l'éq. de Maxwell-Gauss : $\operatorname{div} \vec{E}(M) = \dfrac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$

donne $\operatorname{div} \vec{g}(M) = -4\pi\mathcal{G}\rho(M)$

Rq : il n'y a rien à connaître par cœur (excepté les expressions des forces), à partir des expressions des forces on retrouve les équivalents

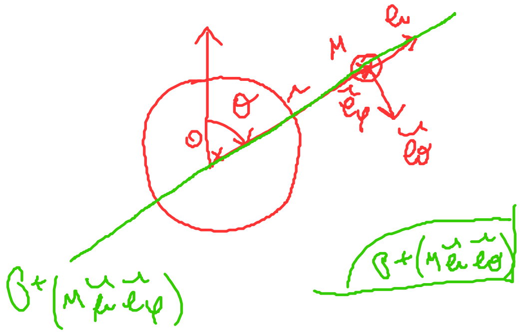
## Application :


sphère de masse M uniformément répartie

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} & \text{à l'intérieur de la sphère} \\ 0 & \text{à l'extérieur de la sphère} \end{cases}$$

On cherche $\vec{g}(M)$ partout dans l'espace en appliquant l'analogue du th. de Gauss.

**Étape 1** : on repère M par ses coordonnées sphériques




$M \in P^+(M, \underline{\vec{e_r}}, \vec{e_\theta})$ et $P^+(M, \underline{\vec{e_r}}, \vec{e_\varphi})$

donc $\vec{g}(M) \in$ à ces 2 plans

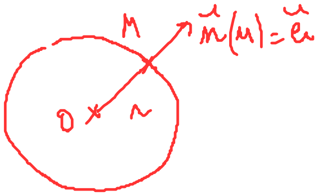
donc $\vec{g}(M)$ est selon $\vec{e_r}$

$\|\vec{g}(M)\| = \|\vec{g}(r, \cancel{\theta}, \cancel{\varphi})\|$

invariance par rotation autour de O

donc $\boxed{\vec{g}(M) = g(r)\,\vec{e_r}}$

**Étape 2** : on choisit pour surface fermée de Gauss, une sphère de centre O et de rayon $r = OM$ (à ne pas confondre avec la sphère de rayon R qui contient les masses)




$$\Phi = \oiint \vec{g}(M)\, dS(M)\, \vec{n}(M)$$
$$= \oiint g(r)\, \vec{e_r}\, dS\, \vec{e_r}$$

sur la sphère de Gauss, r est cst donc $g(r) = \text{cte}$

$$= g(r) \oiint dS$$
$$= g(r)\, 4\pi r^2$$

**Étape 3** : on applique le th. de Gauss : $\Phi = g(r)\, 4\pi r^2 = m_{int} \times (-4\pi G)$

**Cas 1** : $r < R$


sphère qui contient la masse totale M

sphère de Gauss qui contient la masse $m_{int}$

$$m_{int} = \rho_0 \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

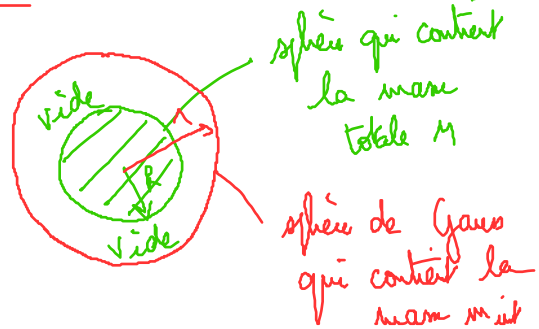
soit $g(r)\, 4\pi r^2 = \rho_0\, \frac{4}{3}\pi r^3 (-4\pi G)$

$$\boxed{\vec{g}(r) = -\frac{4\pi}{3}\rho_0\, G\, r\, \vec{e_r}} \qquad \rho_0 = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

ou $\boxed{\vec{g}(r) = -G\,\dfrac{M r}{R^3}\,\vec{e_r}}$

⚠ $r\vec{e_r} = \vec{OM}$ cela peut servir dans les exos

## Cas 2 : $r > R$

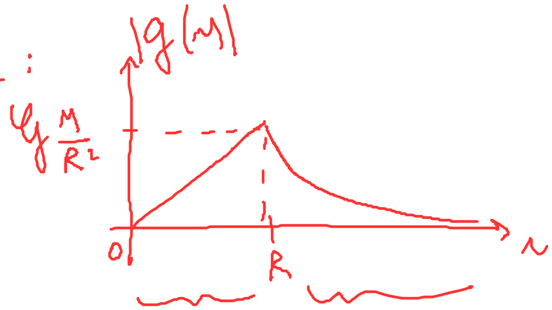



$m_{int} = M$

soit $g(r)\, 4\pi r^2 = M(-4\pi \mathcal{G})$

soit $\boxed{\vec{g}(r) = -\mathcal{G}\dfrac{M}{r^2}\,\vec{e_r}}$

**Bilan :**




$|g| = \mathcal{G}\dfrac{Mr}{R^3}$ $\qquad$ $|g| = \mathcal{G}\dfrac{M}{r^2}$

$\vec{g}$ est selon $-\vec{e_r}$ : le champ de gravitation est attractif

$\vec{g}$ est continu en $r = R$