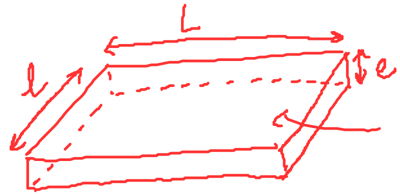
V) Champ et potentiel créés par un plan chargé infini

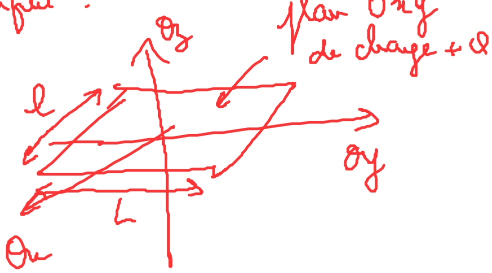
Situation :



la charge Q est répartie uniformément dans un parallélépipède de très petite épaisseur : $\begin{cases} e \ll l \\ e \ll L \end{cases}$

On peut définir : $\rho = \dfrac{Q}{e\,l\,L}$ la densité volumique de charges

Modélisation : Ce parallélépipède peut être modélisé par un plan portant la charge Q sur sa surface. Ce plan est de grandes dimensions donc on néglige les effets de bord soit cela revient à dire que le plan est infini.



On définit la charge surfacique par :

$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{l\,L}}$$

← charge totale

← surface du plan

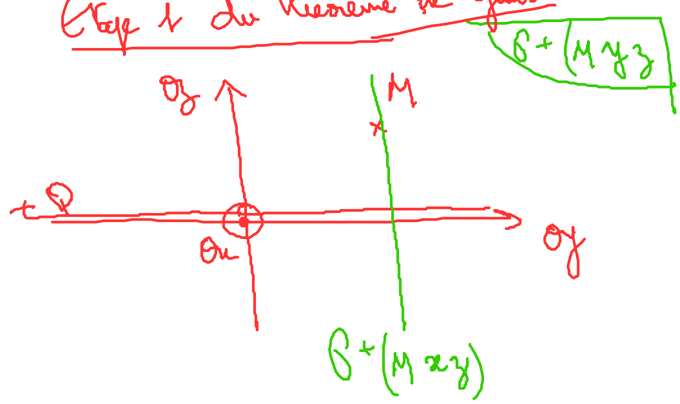
$[\sigma] = C\,m^{-2}$

Rq : l'énoncé peut demander le lien entre ρ et σ :

$$Q = \rho\, e\, l\, L = \sigma\, l\, L \quad \text{soit} \quad \boxed{\rho\, e = \sigma}$$

On cherche le potentiel et le champ électriques créés par ce plan infini.

Etape 1 du théorème de Gauss : M est repéré par ses coordonnées cartésiennes



$M \in \Pi^+(M\,y\,z)$ et $\Pi^+(M\,x\,z)$

donc $\vec{E}(M) \in$ à ces 2 plans

donc $\boxed{\vec{E}(M) \text{ selon } (Oz)}$

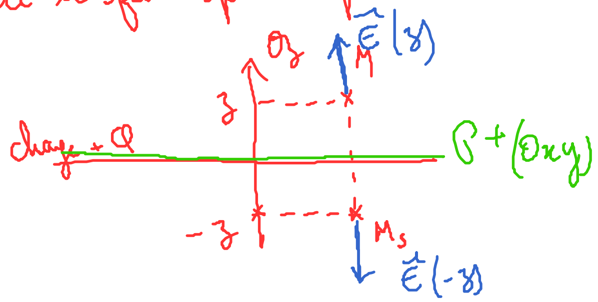
$\|\vec{E}(M)\| = \|\vec{E}(\cancel{x}, \cancel{y}, z)\|$

invariance par translation selon (Ox) et (Oy)

Comme on néglige les effets de bord, le plan est infini et donc quand on déplace le plan selon (Oy) ou selon (Ox) le point M ne voit pas de changement

soit $\boxed{\vec{E}(M) = E(z)\,\vec{e}_z}$

Ici il faut pousser plus loin les symétries et étudier la parité de $E(z)$.

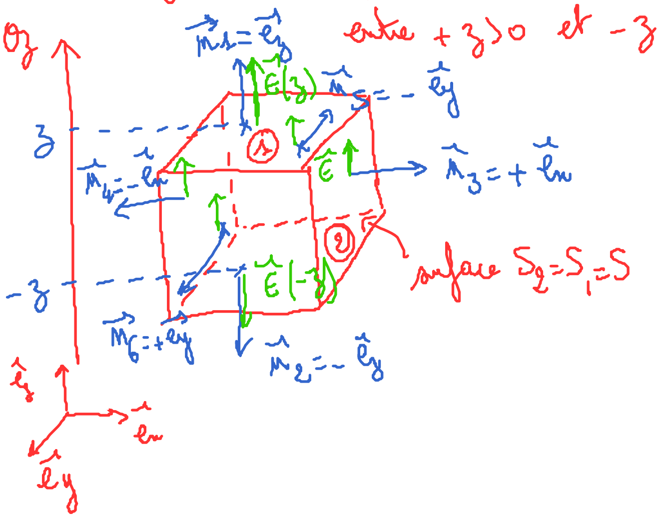


le plan (Oxy) est un plan Π^+ et les points $M(z)$ et $M_s(-z)$ sont symétriques / à ce plan donc les champs électriques en ces points sont symétriques / à $\Pi^+(Oxy)$

Sur le schéma on ajoute $\vec{E}(z)$ selon Oz et par symétrie on a : $\boxed{\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)}$

Etape 2 du théorème de Gauss : Ici la situation est difficile car les charges ne sont pas dans un volume mais sur une surface donc le choix de la surface fermée de Gauss peut poser problème.

On choisit pour surface fermée de Gauss un parallélépipède de surface S et compris entre $+z>0$ et $-z<0$



sur les autres surfaces $\vec{n} \perp \vec{E}$

$$\Phi = \oiint \vec{E}(M)\, dS\, \vec{n}(M)$$

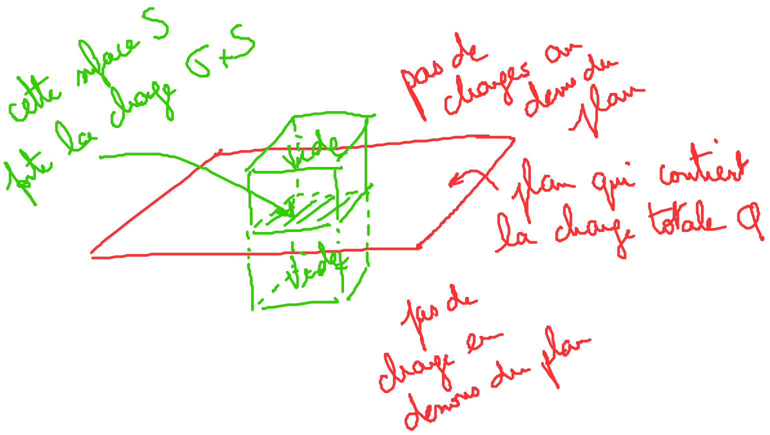
$$= \iint_{1} \vec{E}(z)\, dS\, \vec{e}_z + \iint_{2} \vec{E}(-z)\, dS\, (-\vec{e}_z) + 0$$

$$= \iint_{1} E(z)\, \vec{e}_z\, dS\, \vec{e}_z + \iint_{2} -E(z)\, \vec{e}_z\, dS\, (-\vec{e}_z)$$

$$= 2E(z) \underbrace{\iint_{1} dS}_{=\text{surface } S}$$

$$\boxed{\Phi = 2E(z)S}$$

Etape 3 du théorème de Gauss : $\Phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ soit ici $Q_{int} = \sigma S$



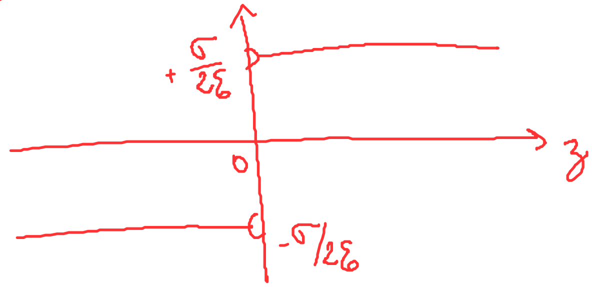
d'où $2E(z)S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$

$\boxed{\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z}$ pour $z>0$

et $\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)$

donc $\boxed{\vec{E}(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z}$ pour $z<0$

Bilan :



* le champ électrique n'est pas défini sur le plan
* le champ électrique n'a pas la m valeur de chaque côté du plan, on dit qu'il est discontinu. Cette discontinuité mesure $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$E(z=0^+) - E(z=0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

La discontinuité n'est pas normale, dans la nature le champ électrique est continu, cette discontinuité vient du modèle utilisé, les charges réelles sont dans un parallélépipède et on assimile ce parallélépipède à un plan. Au voisinage de ce plan, le modèle présente une anomalie.

On trouve le potentiel en écrivant : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{dV}{dz}\vec{e_z}$

$z>0$: $\frac{dV}{dz} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow V = -\frac{\sigma z}{\varepsilon} + A$

$z<0$; $\frac{dV}{dz} = +\frac{\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow V = +\frac{\sigma z}{\varepsilon} + B$

le potentiel est toujours continu, quelque soit le modèle donc : $V(z=0^-) = V(z=0^+)$

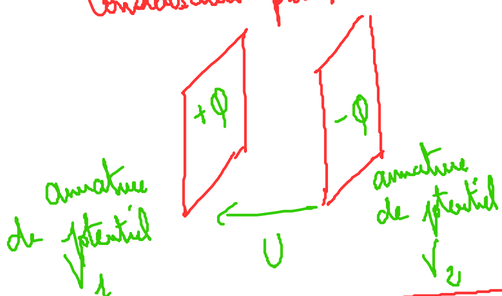
donc $A = B$

On trouvera A avec l'énoncé, celui-ci doit donner la valeur du potentiel en un point pour trouver A.

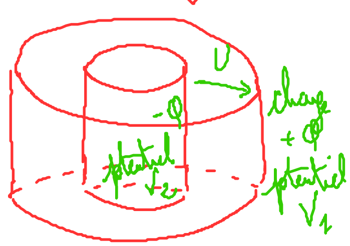
VI) Le condensateur

Un condensateur est composé de deux armatures qui se font face et qui portent sur leurs surfaces les charges $+Q$ et $-Q$.

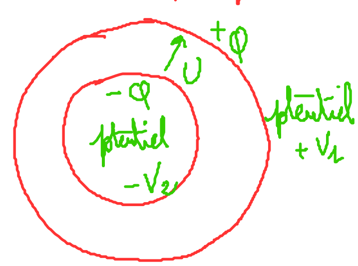
Condensateur plan :



Condensateur cylindrique :



Condensateur sphérique :



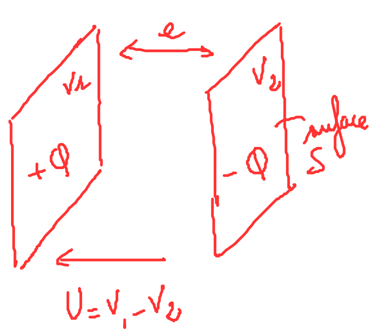
La tension s'écrit $\boxed{U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}(M)\, d\vec{OM}}$

On a la relation : $\boxed{Q = C \times U}$ où C est la capacité du condensateur

dans cette relation, la flèche de tension de U va de $-Q$ vers $+Q$

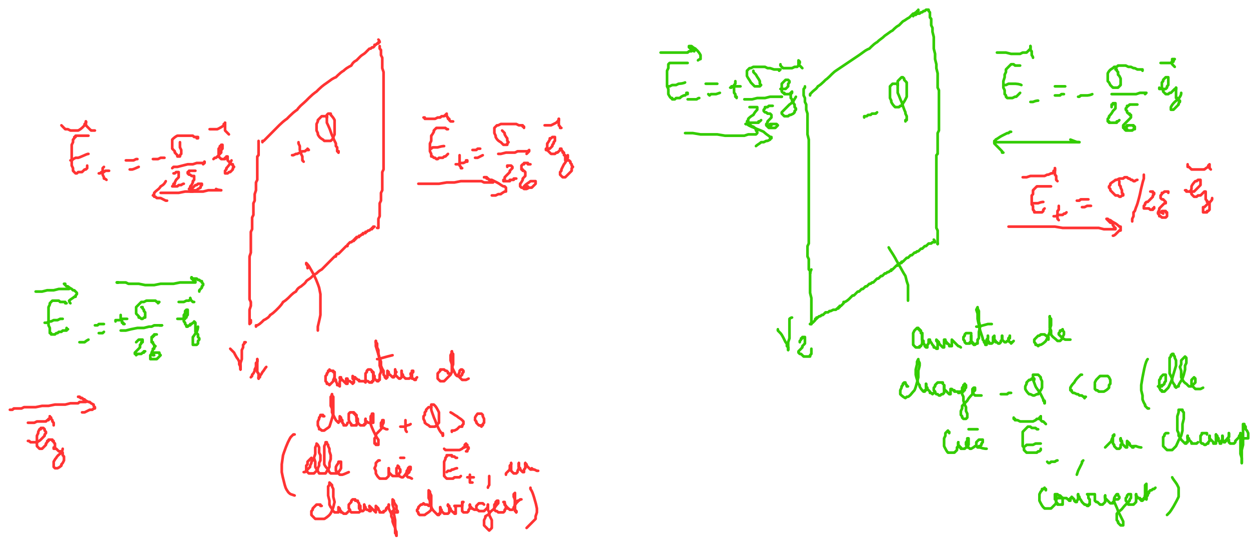
Au programme, il y a le condensateur plan, il faut connaître et savoir retrouver l'expression de la capacité.

modèle du condensateur plan

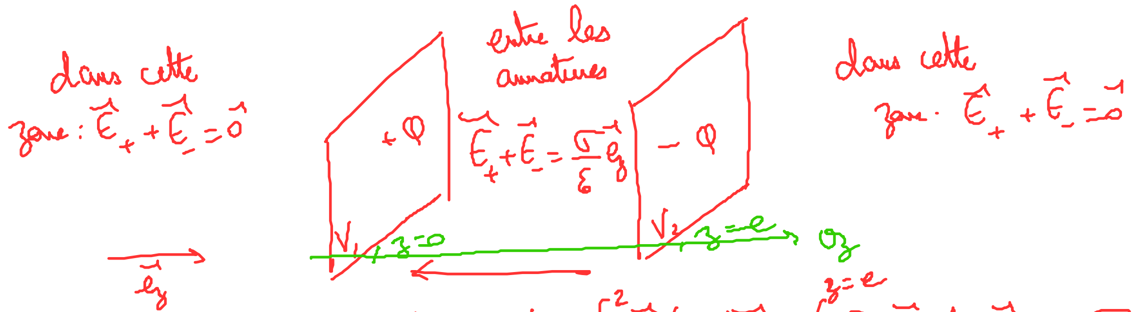


Les armatures sont assimilées à des plans infinis (on néglige les effets de bord).

On utilise les résultats du V : avec $\boxed{\sigma = Q/S}$



On en déduit le champ résultant :



$$U = V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}(M)\, d\vec{OM} = \int_{z=0}^{z=e} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z\, dz\, \vec{e}_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^e dz = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}$$

$\left| \begin{array}{l} V_1 = V(z=0) \\ V_2 = V(z=e) \end{array} \right.$

avec $\sigma = \frac{Q}{S}$ soit $U = \frac{Qe}{\varepsilon_0 S}$

et $\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}}$ B

S : surface des armatures

e : distance entre les armatures