DS 7 de physique

Le sujet comprend trois problèmes indépendants à traiter dans l'ordre de votre choix. Il est demandé de numéroter les pages au format i/N où i est le numéro de la page et N le nombre de pages.

Tout résultat doit être justifié, l'utilisation d'une loi exige de la nommer cette loi, de donner les hypothèses d'application... Un grand soin doit être apporté à la présentation et à la rédaction.

I. Problème I: Ondes acoustiques

Afin d'assurer le confort acoustique des occupants d'une pièce d'habitation vis-à-vis des bruits qui lui sont propres, une solution consiste à recouvrir les parois de la pièce avec des matériaux absorbants appropriés. Cette méthode, appelée correction acoustique, permet d'optimiser selon l'usage de la pièce sa durée de réverbération liée à la multiplicité des échos sonores renvoyés par les parois.

On considère un fluide, caractérisé à l'équilibre par un champ des vitesses uniformément nul et des champs de pression et de masse volumique uniformes et stationnaires, notés respectivement p_0 et ρ_0. Lorsque l'équilibre est rompu au passage d'une onde sonore se propageant selon l'axe $(O,\vec{u}_x)$, le fluide est alors caractérisé à l'instant t en tout point M d'abscisse x de l'écoulement supposé parfait par :

- un champ de pression $p(x,t) = p_0 + p_1(x,t)$ où la quantité p_1 est appelée surpression ou pression acoustique ;
- un champ de masse volumique $\rho(x,t) = \rho_0 + \rho_1(x,t)$;
- un champ des vitesses $\vec{v}(x,t) = \vec{0} + \vec{v}_1(x,t) = v_1(x,t)\vec{u}_x$.

$\boxed{1}$ La propagation de la perturbation dans le fluide est traitée dans l'approximation acoustique. Préciser le cadre de cette approximation.

$\boxed{2}$ Rappeler l'équation d'Euler, limitée aux seules forces pressantes (effets de la pesanteur négligés en particulier). En déduire après linéarisation l'équation de couplage :

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0$$

Établir de la même façon une seconde équation de couplage linéarisée à partir de l'équation locale de conservation de la masse.

$\boxed{3}$ Le fluide évolue de façon isentropique sous l'effet des ondes sonores. Montrer que $\rho_1 = \rho_0 \chi_{S,0} p_1$ où $\chi_{S,0}$ est le coefficient de compressibilité isentropique du fluide à l'équilibre.

On rappelle que $\chi_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_S$.

$\boxed{4}$ Déduire de l'ensemble des résultats précédents que la pression acoustique $p_1(x,t)$ obéit à une équation de d'Alembert. Donner l'expression de la célérité c des ondes sonores en fonction de $\chi_{S,0}$ et ρ_0.

$\boxed{5}$ On suppose que le fluide évoluant de façon isentropique se comporte en outre comme un gaz parfait. Justifier que $p\rho^{-\gamma} = C^{ste}$ où γ est le rapport entre les capacités thermiques à pression et volume constants du fluide. En déduire que la célérité des ondes sonores s'écrit : $c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$.

L'onde est plane, progressive, sinusoïdale de pulsation ω, de la forme $p_1(x,t) = p_{1,m}\cos(\omega t - kx)$ pour la pression acoustique, avec $k = \frac{\omega}{c}$.

6 Déduire de l'une des équations de couplage établies à la 2 l'expression du rapport $Z_c = \frac{p_1}{v_1}$, appelé impédance caractéristique du milieu, en fonction de ρ_0 et c. Que devient la relation entre p_1 et v_1 dans le cas d'une onde se propageant dans le sens inverse ?

7 La densité volumique d'énergie sonore $\langle e \rangle_T$ associée à l'onde s'écrit en moyenne sur une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$: $\langle e \rangle_T = \frac{1}{2}\rho_0 \langle v_1^2 \rangle_T + \frac{1}{2}\chi_{S,0} \langle p_1^2 \rangle_T$.
Quelle est la signification physique de chacun des termes composant cette expression ?
Exprimer $\langle e \rangle_T$ pour l'onde considérée en fonction de $p_{1,m}$, ρ_0 et c.

8 On appelle intensité sonore I la grandeur définie par : $I = \left| \langle p_1 v_1 \rangle_T \right|$. Vérifier que cette grandeur est homogène à une puissance surfacique. Montrer que l'intensité sonore est proportionnelle à la densité volumique d'énergie sonore $\langle e \rangle_T$ pour l'onde considérée.

Le fluide est l'air d'une pièce d'habitation, au centre de laquelle se trouve une source sonore ponctuelle et isotrope, émettant de façon continue un son harmonique. En un point donné de la pièce, on distingue le champ direct dû à l'onde divergente émise par la source qui n'a pas encore rencontré d'obstacles, du champ réverbéré dû à l'ensemble des ondes ayant eu une ou plusieurs réflexion(s) sur les parois et les objets de la pièce. Dans la théorie de l'acousticien américain Sabine, la densité volumique d'énergie sonore du champ réverbéré $\langle e_r \rangle_T$ est supposée uniformément répartie dans toute la pièce à un instant donné. Dans ces conditions, on montre que l'intensité sonore correspondante s'écrit : $I_r = \frac{c\langle e_r \rangle_T}{4}$. On notera que I_r et $\langle e_r \rangle_T$ sont des quantités moyennées sur une période T de la source, mais sont susceptibles de varier sur une échelle de temps caractéristique τ beaucoup plus grande.

On néglige dans la suite l'absorption due à l'air, mais pas celle due aux parois et objets de la pièce. On note V le volume de la pièce, S la surface totale des parois et des objets de la pièce, α_m leur coefficient d'absorption moyen, défini comme le rapport entre la puissance sonore absorbée au niveau des parois et des objets et la puissance sonore incidente.
À l'instant $t = 0$, on coupe la source sonore. On se propose d'établir la loi de décroissance $I_r(t)$ de l'intensité sonore du champ réverbéré au cours du temps.

9 Exprimer la puissance sonore moyenne $\mathcal{P}_a$ absorbée par les parois et les objets de la pièce en fonction de I_r, α_m et S.
Exprimer de même l'énergie sonore moyenne $\mathcal{E}(t)$ dans la pièce à l'instant t en fonction de son volume V, I_r et c

10 À l'aide d'un bilan d'énergie, montrer que l'intensité réverbérée $I_r(t)$ obéit à l'équation différentielle du premier ordre : $\frac{\mathrm{d}I_r}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha_m S c}{4V} I_r = 0$.
Donner la loi d'évolution $I_r(t)$. On introduira un temps caractéristique τ et on notera $I_r(t=0) = I_{r,0}$.

On définit le temps de réverbération T_r comme la durée nécessaire pour que le niveau d'intensité sonore L_I dans la pièce décroisse de 60 dB par rapport à son niveau initial, soit : $\Delta L_I = L_I(t = T_r) - L_I(t=0) = -\,60\ \text{dB}$. On rappelle que le niveau d'intensité sonore est défini par : $L_I = 10 \log \frac{I}{I_0}$ où $I_0 = 10^{-12}\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ est l'intensité sonore au seuil d'audibilité à 1 000 Hz.

Q11 Exprimer le temps de réverbération T_r en fonction de τ. Vérifier qu'on retrouve la formule semi-numérique de Sabine : $T_r = 0{,}16 \frac{V}{\alpha_m S}$, où le rapport V/S est exprimé en m et T_r en s.
On prendra $c = 3{,}4 \cdot 10^2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ (air à la température $T_0 = 293\ \text{K}$ à l'équilibre).

On considère le panneau isolant comme une plaque infiniment fine située en $x = 0$, de masse surfacique μ. Elle sépare deux fluides parfaits de même masse volumique. Les deux milieux 1 et 2 sont supposés illimités.

La source du bruit émet une onde sonore incidente qui se propage dans le milieu 1 jusqu'à la plaque. Deux ondes sont alors créées, comme l'illustre la **figure 5** :

- l'onde réfléchie, se propageant dans le milieu 1 dans le sens opposé à l'onde incidente ;
- l'onde transmise, se propageant dans le milieu 2 dans le même sens que l'onde incidente.

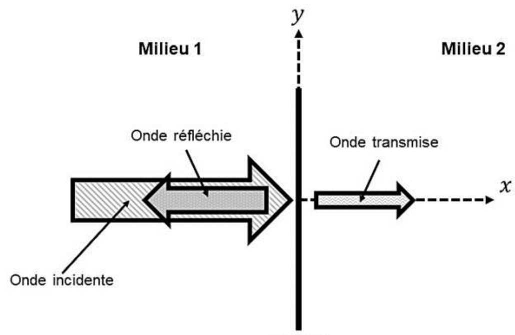


Figure 5 - Comportement de l'onde incidente

Une onde sonore incidente progressive monochromatique de pulsation ω arrive sur la plaque depuis le milieu 1 vers le milieu 2, **figure 6**. On supposera que cette onde est longitudinale et plane. On rappelle que les deux milieux sont de même nature.

On supposera que la forme du champ de pression associée à l'onde incidente progressive monochromatique de pulsation ω et de nombre d'ondes k qui arrive sur la plaque est définie par l'**équation (6) :**

$$\underline{p_i}(x,t) = p_0 e^{j(\omega t - kx)} \text{ équation (6)}$$

12- Déterminer une expression des champs de vitesse et pression associés aux ondes transmise et réfléchie. On note $\underline{p_r} = \underline{r} p_0$ et $\underline{p_t} = \underline{\tau} p_0$ les amplitudes des ondes réfléchie et transmise et $Z = \rho_0 c$.

13- On cherche à déterminer les expressions de r et τ.

13 a- Donner l'équation donnée par la continuité de la vitesse en $x = 0$.

13 b- Donner l'équation donnée par l'application du principe fondamental de la dynamique sur un élément de surface dS de la plaque de masse surfacique μ.

13 c-. En déduire que les coefficients de réflexion $\underline{r}$ et de transmission $\underline{\tau}$ en amplitude s'écrivent $\underline{r} = \dfrac{j\omega\mu}{2Z + j\omega\mu}$ et $\underline{\tau} = \dfrac{2Z}{2Z + j\omega\mu}$.

14- On définit le coefficient de transmission en énergie par $T = |\underline{\tau}|^2$. La plaque isolante se comporte comme un filtre. Déduire de l'expression de T la nature de ce filtre.

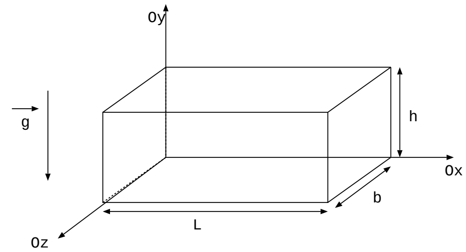
II. Problème II: Vibrations d'une passerelle

Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au dessus de la Tamise à Londres. Quand elle fut ouverte aux piétons on remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix-huit mois de recherches furent nécessaires pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui furent donc finalement consultés.

L'objectif de ce problème est la modélisation de plus en plus fine d'une passerelle piétonne et la compréhension de certains problèmes posés par le Millennium Bridge de Londres.

Première approche: équations d'onde des ondes longitudinales et transversales dans la passerelle

On peut assimiler la passerelle à une poutre homogène de section rectangulaire de largeur b selon (Oz), de hauteur h selon (Oy), axe vertical et de grande longueur L selon Ox. La structure de la poutre est déformable en tout point, on note ρ sa masse volumique. **On néglige dans toute la suite du problème l'action de la pesanteur.**



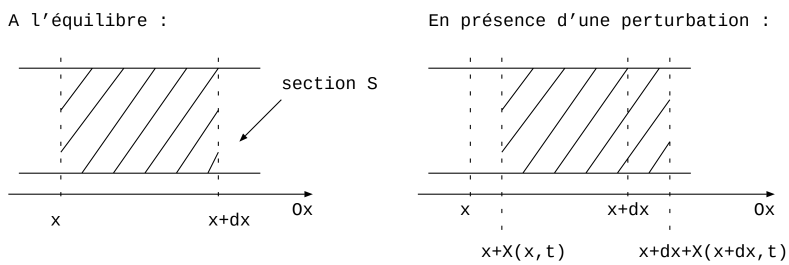
On étudie dans un premier temps les petits mouvements de déformation selon Ox. Dans le domaine d'élasticité du matériau, la norme F de la force de traction permettant à un solide de longueur L de s'allonger de ΔL est donnée par la loi de Hooke :

$$F = ES\frac{\Delta L}{L}$$

où E est une constante appelée module d'Young du matériau.

1. Quelle est l'unité du module d'Young ? On motivera sa réponse pour laquelle on utilisera une seule unité du système international.

2. On note $X(x,t)$ le déplacement par rapport à la position de repos d'une section plane d'abscisse x.



2.a. Quelle est la nature des ondes, longitudinale ou transversale? Justifier.

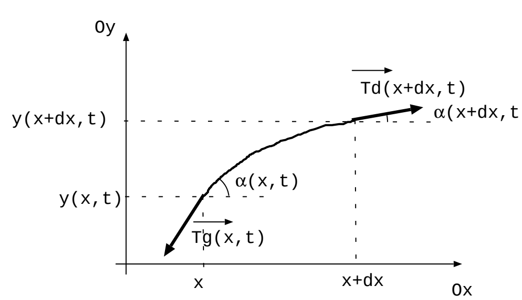
2.b. Exprimer la variation relative de longueur d'une tranche élémentaire de la poutre comprise au repos entre x et $x + dx$.

2.c. En déduire que la force de traction exercée par la partie droite (du côté des x croissants) sur la partie gauche (du côté des x décroissants) s'écrit: $\overrightarrow{F_d}(x,t) = ES\frac{\partial X}{\partial x}(x,t)\overrightarrow{U_x}$.

3. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à la tranche de longueur dx et en déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $X(x,t)$. Commenter.

Afin de prendre en compte le mouvement transverse de la passerelle selon l'axe vertical Oy, on adopte le modèle de la corde. Dans ce modèle bidimensionnel, la passerelle est représentée à l'instant t par une ligne d'équation $y(x,t)$ de masse linéique μ uniforme. On rappelle qu'on néglige la pesanteur.

Les déplacements $y(x,t)$ sont contenus dans un plan vertical et sont de faible amplitude. On suppose donc qu'à chaque instant $\alpha(x,t) << 1$. Sous ces hypothèses, la longueur de la corde ne varie pas et chaque tronçon infinitésimal de la passerelle n'est déplacé que selon la verticale.



4. Quelle est la nature des ondes, longitudinale ou transversale? Justifier.

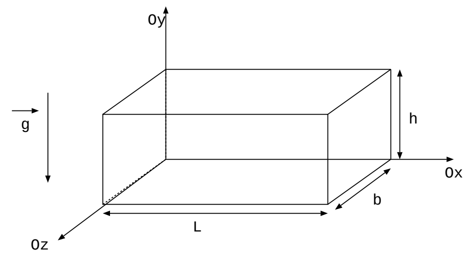
5. Démontrer la relation entre $\alpha(x,t)$ et $\dfrac{\partial y}{\partial x}(x,t)$.

6. En appliquant un théorème de mécanique à un tronçon de corde infinitésimal compris, au repos, entre x et $x+dx$, montrer que, sous les hypothèses effectuées, le module de la tension de la corde est indépendant de x. On le notera T_0.

7. Déterminer l'équation de propagation vérifiée par $y(x,t)$. Commenter.

Modèle de la poutre élancée

Pour des contraintes modérées, induisant un déplacement vertical petit devant les dimensions transversales de la poutre, c'est-à-dire $y(x,t)$ très petit devant h ou b, on peut alors se placer dans une extension du modèle de la corde. On considère une passerelle de section S, de masse volumique ρ, de module d'Young E et dont le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe (Oz) est $I = \dfrac{bh^3}{12}$.



L'écriture des contraintes conduit alors à une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + IE\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

8. On cherche des solutions sous la forme $y(x,t) = \cos(\omega t) f(x)$. De quel type d'onde s'agit-il? Justifier le choix de ce type d'onde.

9. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $f(x)$ et vérifier que $f(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$ est bien solution. Déterminer l'expression de β en fonction des données.

On se place dans l'hypothèse d'une passerelle de longueur L en appui simple à ses extrémités, soit une passerelle fixe à ses deux extrémités. Les conditions aux limites s'écrivent:

$y(x=0,t) = y(x=L,t) = 0$ et $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x=0,t) = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x=L,t) = 0$.

10. Déduire des conditions aux limites que $A = 0$ et que la pulsation spatiale β ne peut prendre que certaines valeurs. En déduire les pulsations propres ω_n de vibration transversale d'une poutre en appui simple en fonction de L, E, I, ρ, S et d'un entier n caractérisant le mode de vibration.

11. Différents modes de vibrations d'une passerelle ont été représentés sur l'annexe 1. Quels sont ceux correspondants à l'étude proposée dans cette section ? Identifier de façon argumenté pour chacun de ces modes, l'entier n le caractérisant.

La passerelle du Millennium Bridge est globalement une poutre en aluminium de 322 m de longueur, d'épaisseur $h = 1,07$ m et de largeur $b = 4$ m. Elle repose sur 4 appuis en créant 3 travées solidaires de $L_1 = 70$ m, $L_2 = 144$ m et $L_3 = 108$ m. On donne la masse volumique de l'aluminium $\rho = 2700$ $kg.m^{-3}$ et son module d'Young $E = 69.10^9$ SI.

L'action de la marche d'un piéton est caractérisée par un contact continu sur la surface du sol puisque le second pied touche le sol avant que le premier ne le quitte. La force engendrée comprend une composante verticale.

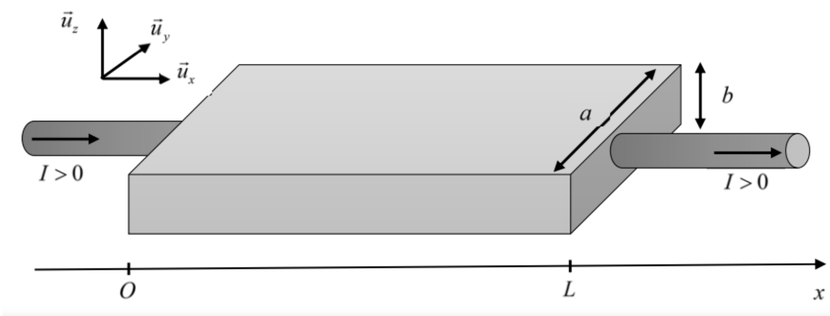
12. Dans le cadre du modèle de la poutre sur appui simple, existe-t-il des modes de vibration transversale du Millennium Bridge susceptibles d'entrer en résonance avec un forçage par des piétons (voir annexe 2)? Discuter également de la possibilité d'une excitation résonnante de certains modes de vibration latérale, c'est-à-dire dans le sens de la largeur b. On motivera ses réponses par une argumentation précise.

III. **Problème III: effet Hall**

Avant d'aborder l'effet Hall classique, il est utile de rappeler la physique du mécanisme de conduction électrique.

Mécanisme de la conduction électrique

On considère une plaque conductrice parallélépipédique de largeur a, d'épaisseur b et de longueur L traversée par un courant d'intensité $I > 0$ uniformément réparti.



Données: charge élémentaire $e = 1,6.10^{-19}\ C$, masse de l'électron: $m = 9,1.10^{-31}\ kg$, nombre d'Avogadro: $\mathcal{N}_a = 6,02.10^{23}\ mol^{-1}$, constante de Boltzmann: $k_B = 1,38.10^{-23}\ J.K^{-1}$.

La plaque constitue un milieu homogène isotrope de conductivité γ, comprenant entre autres des électrons mobiles de densité volumique n_v. On exclut l'influence de tout autre type de porteurs de charge participant à la conduction. Ces électrons de masse m et de charge $-e$ sont tous supposés se déplacer à la même vitesse $\overrightarrow{v} = -v\overrightarrow{u_x}$.

Ces électrons, supposés non relativistes, sont soumis à l'action d'un champ électrique $\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{u_x}$ avec $E_0 > 0$ responsable de leur mise en mouvement.

On modélise les interactions des électrons mobiles avec le milieu lors de leur déplacement par une force de frottement fluide $\overrightarrow{F_f} = -\alpha\overrightarrow{v}$, avec α un coefficient caractéristique du milieu.

On négligera le poids des particules devant les autres forces.

1. Que signifie l'expression "non relativiste" pour les électrons?

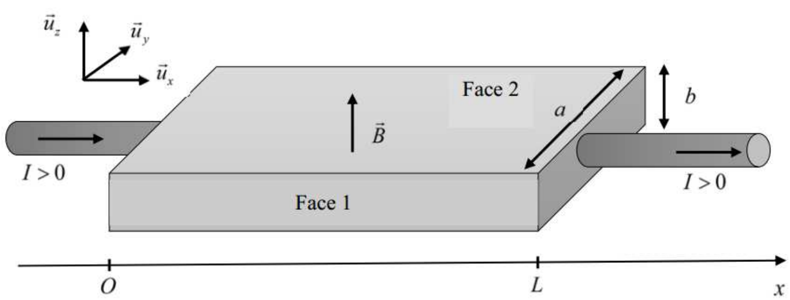
2. Exprimer l'intensité électrique en fonction de n_v, e, v, a et b.

3. Etablir l'équation différentielle vérifiée par le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ d'un électron. Introduire un temps τ caractéristique à exprimer en fonction de α et m.

Montrer qu'en régime stationnaire, on obtient la loi $\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E}$. Exprimer γ en fonction de τ, m, e et n_v. Quel nom porte cette loi?

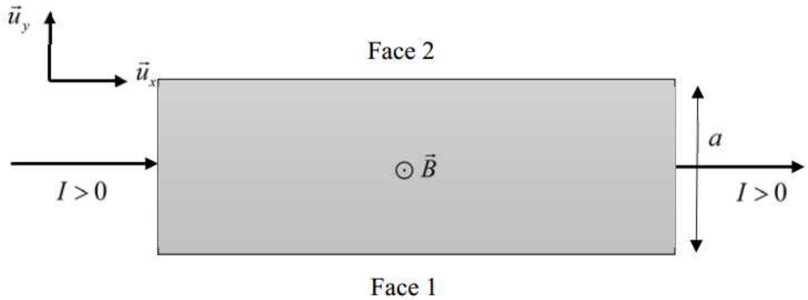
4. Application numérique: calculer la valeur de τ pour une plaque d'aluminium en supposant que chaque atome libère un électron de conduction. Données: masse molaire de l'aluminium: $M = 27\ g.mol^{-1}$, masse volumique $\rho = 2700\ kg.m^{-3}$ et $\gamma = 37,7.10^6\ S.m^{-1}$.

On soumet désormais la plaque à un champ magnétique extérieur $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$ uniforme et stationnaire. On négligera le champ magnétique créé par le passage du courant dans le milieu.



5. Rappeler l'expression de la force de Lorentz magnétique. Calculer la puissance de cette force et commenter le résultat.

6. Reproduire le schéma suivant et y représenter les symboles + et − indiquant l'accumulation de charges positives et négatives sur les faces. Justifier alors l'apparition d'un champ électrique orthogonal aux lignes de courant I.



7. Montrer que le champ électrique de Hall s'écrit $\overrightarrow{E_h} = -\dfrac{IB}{n_v eab}\overrightarrow{u_y}$ et en déduire la résistance de Hall (définie dans le document 4) en fonction de n_v, e, B et b.

Document 4 - Effet Hall classique

En 1879, Edwin Hall découvre que lorsqu'un courant électrique I traverse un barreau conducteur plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$, il apparaît une différence de potentiel, appelée tension Hall et notée U_H, dans la direction perpendiculaire au courant et au champ (**figure 8**). Son origine est la force que le champ magnétique exerce sur les porteurs de charge qui participent au courant (force de Lorentz).

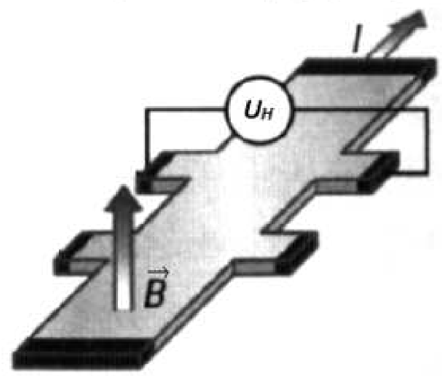


Figure 8 - Mesure de la tension de Hall

Dans les conducteurs usuels, U_H vérifie alors la relation : $U_H = R_H I$ avec R_H la résistance Hall.

De plus, la résistance Hall R_H est proportionnelle à la norme du champ $\vec{B}$ et à l'inverse du nombre n_v de porteurs de charge par unité de volume. L'effet Hall fournit donc un moyen de mesure du nombre de porteurs de charges, utilisé en particulier pour caractériser les matériaux semiconducteurs. Il est aussi à la base du fonctionnement des dispositifs les plus couramment utilisés pour la mesure des champs magnétiques.

Source : Gilbert Pietryk, *Panorama de la Physique*, 2007

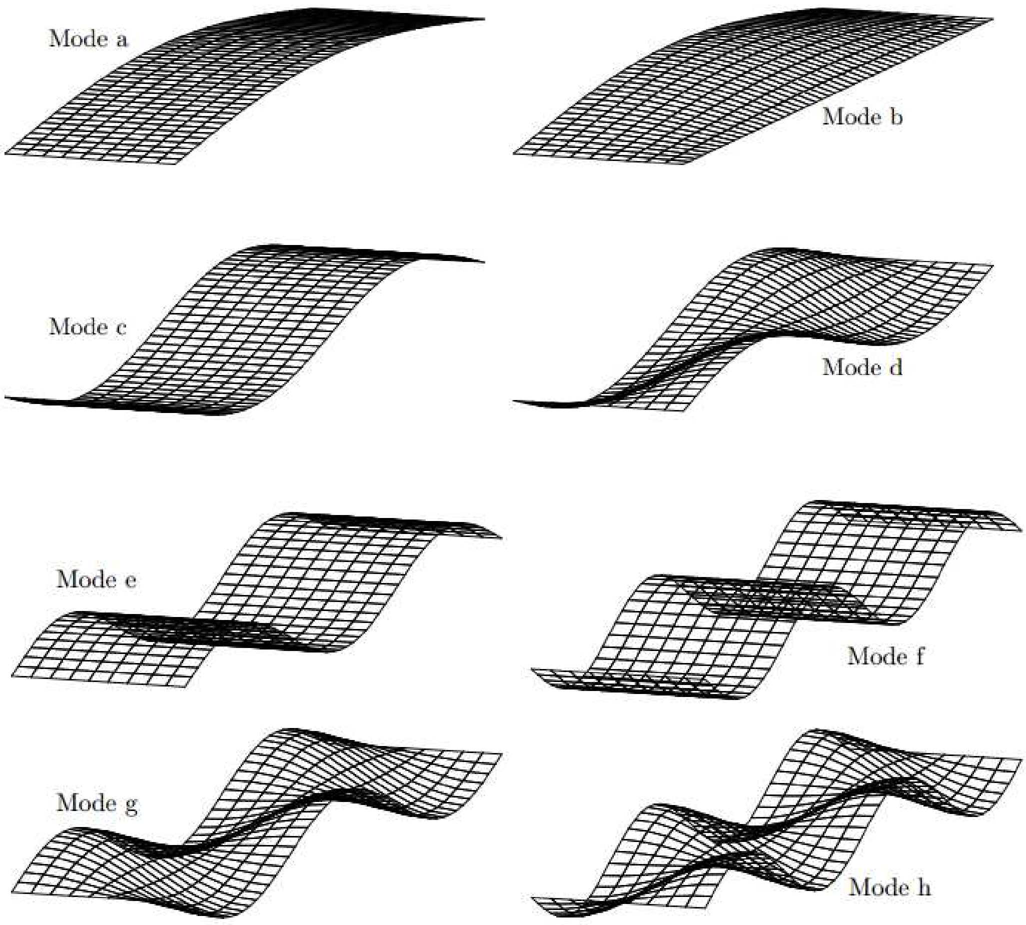
8. Application numérique: Déterminer quelle serait la valeur de U_H pour mesurer un champ magnétique de l'ordre du tesla avec une plaque en aluminium d'épaisseur $b = 0,1\ mm$ parcourue par un courant $I = 0,1\ A$. Commenter la valeur obtenue.

9. Les matériaux semi-conducteurs sont des matériaux dont la densité de porteur de charges est entre autres donnée par la loi: $n_v = n_0 e^{-\frac{\xi}{k_B T})}$

avec $n_0 = 7,8.10^{24}\ m^{-3}$ et $\xi = 2,75.10^{-20}\ J$ pour un matériau à base de silicium par exemple. Expliquer l'intérêt des semi-conducteurs pour des sondes à effet Hall permettant la mesure de champ magnétique. Donnée: constante de Boltzmann: $k_B = 1,38.10^{-23}\ J.K^{-1}$.

10. Calculer la variation relative de la résistance Hall $\dfrac{\Delta R_h}{R_h}$ pour la sonde précédente à base du semi conducteur lorsque la température varie de 10 K autour de la température ambiante. Quel inconvénient possède alors ce type de sonde ?

Annexe 1:



Annexe 2: