

# Correction DS8

## I. Expérience de Stern et Gerlach

1. Le noyau est immobile car il est très lourd par rapport à l'électron.

2. L'intensité du courant dans la boucle se déduit de  $i = \frac{dq}{dt}$  où ici c'est la charge  $e$  qui passe pendant une période  $T = \frac{2\pi r}{v}$  soit  $i = \frac{ev}{2\pi r}$ .

Le courant circule dans le sens opposé du mouvement de l'électron et le moment magnétique de la boucle de courant formé par l'électron s'écrit  $\vec{M} = i\pi r^2(-\vec{e}_z)$  (le moment magnétique se déduit de la règle de la main droite à partir du sens de  $i$ ).

On a donc  $\vec{M} = -\frac{erv}{2}\vec{e}_z$ .

3. Le moment cinétique de l'électron s'écrit  $\vec{L} = \overrightarrow{OM}\Lambda m_e \vec{v} = r\vec{e}_r\Lambda m_e v\vec{e}_\theta = m_e rv\vec{e}_z$ . On a donc  $\vec{M} = -\frac{e}{2m_e}\vec{L}$ .

4.  $L$  est un multiple entier de  $\hbar$  soit la plus petite valeur de  $L$  est  $\hbar$  et donc la plus petite valeur du moment magnétique est  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 8,8.10^{-24} \text{ A.m}^2$ .

5. On applique la statistique de Boltzman, selon laquelle, on compte  $\frac{k_B T}{2}$  pour chaque degré de liberté d'un atome. En l'occurrence ici les atomes ont trois degrés de liberté de translation soit  $E_{c0} = \frac{3k_B T}{2}$  d'où la température du four  $T = \frac{2E_{c0}}{3k_B}$ .

6. On a  $\vec{M} \cdot \text{grad} = M_x \frac{\partial}{\partial x} + M_y \frac{\partial}{\partial y} + M_z \frac{\partial}{\partial z}$ , on en déduit la force magnétique  $(\vec{M} \cdot \text{grad})(bz\vec{e}_z) = M_z \frac{d}{dz}(bz)\vec{e}_z = M_z b\vec{e}_z$ .

Dans la zone où règne un champ magnétique, un atome de lithium subit la force magnétique et son poids (négligeable), on lui applique la RFD soit:  $m\vec{a} = M_z b\vec{e}_z$ .

En projection sur  $Ox$ :  $\ddot{x} = 0$  soit  $\dot{x} = v_0$  et  $x = v_0 t$

En projection sur  $Oz$ :  $m\ddot{z} = M_z b$  soit  $\dot{z} = \frac{M_z b t}{m}$  et  $z = \frac{M_z b t^2}{2m}$

On en déduit l'équation de la trajectoire en prenant  $t = \frac{x}{v_0}$  soit  $z = \frac{M_z b x^2}{2m v_0^2}$  : c'est l'équation d'une parabole avec  $z > 0$  pour  $M_z$  positif et  $z < 0$  pour  $M_z < 0$ .

7. En dehors de la zone de champ magnétique, les atomes ont une trajectoire rectiligne car ils ne subissent pas de force, leur vitesse est celle qu'ils ont à la sortie de la zone du champ magnétique soit à l'instant  $t = \frac{l}{v_0}$ :

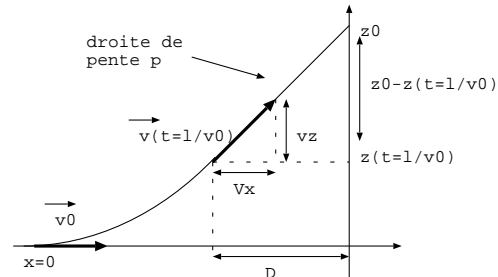
$$\dot{x}(t = \frac{l}{v_0}) = v_0 \text{ et } \dot{z}(t = \frac{l}{v_0}) = \frac{M_z b l}{m v_0}$$

La pente de la droite est donnée par  $p = \frac{\dot{z}(t = \frac{l}{v_0})}{\dot{x}(t = \frac{l}{v_0})} =$

$$\frac{M_z b l}{m v_0^2} \text{ et est aussi égale à } p = \frac{z_0 - z(t = l/v_0)}{D} \text{ soit}$$

$$z_0 = z(t = l/v_0) + pD = \frac{M_z b l^2}{2m v_0^2} + \frac{M_z b l}{m v_0^2} D =$$

$$\frac{M_z b l}{m v_0^2} (D + \frac{l}{2}).$$



8. On observe deux taches symétriques en  $+z_0$  et en  $-z_0$ , cela signifie que la projection  $M_z$  du moment des atomes ne peut prendre que deux valeurs opposées.

9. L'électron célibataire du lithium est l'électron  $2s$  qui a pour nombre quantique  $l = 0$  ce qui signifie que son moment cinétique est nul donc son moment magnétique orbital est nul également. Les atomes de lithium possèdent un moment magnétique dont l'origine n'est pas le mouvement de l'électron autour du noyau, il s'agit du moment magnétique de spin qui peut prendre deux valeurs liés au spin up et spin down.

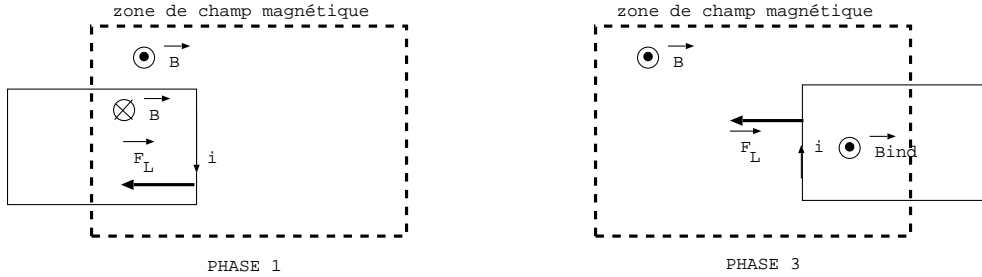
## II. Freinage d'une luge

1. La luge subit son poids qui est une force conservative et la réaction du support qui ne travaille pas car il n'y a pas de frottement et elle est perpendiculaire au support. L'énergie mécanique est conservée. L'énergie potentielle de pesanteur est  $E_p = mgh$  où  $h$  est la hauteur repérée par rapport au point le plus bas de la piste.

On écrit la conservation de l'énergie mécanique entre le point le plus bas où  $v = v_a$  et  $h = 0$  et le point d'arrêt où  $v = 0$  et la luge est à la hauteur  $h$  telle que  $\sin \alpha = \frac{h}{L}$  et  $\sin \alpha = \frac{10}{\sqrt{100^2 + 10^2}} = 0,01$

$E_m = \frac{mv_a^2}{2} = mgh = mgL \sin \alpha$  d'où  $L = \frac{v_a^2}{2g \sin \alpha} = 460 \text{ m}$ : la longueur de piste est très grande pour ce freinage d'où l'intérêt d'utiliser l'induction pour une distance de freinage plus petite.

2.



Phase 1: la luge entre dans la zone de champ magnétique: la surface de la luge plongée dans le champ magnétique augmente, donc le flux magnétique augmente, pour limiter cette augmentation du flux, il apparaît un champ magnétique induit opposé au champ magnétique existant. On en déduit le sens de  $i$  (sens horaire) soit  $i < 0$ .

On peut aussi raisonner sur la force de Laplace: d'après la loi de Lenz, les effets s'opposent aux causes qui leur ont donné naissance. La cause de l'induction est le mouvement du cadre, la force de Laplace qui s'exerce sur le côté du cadre plongé dans le champ magnétique est donc dans le sens tel qu'elle freine le cadre, on en déduit le sens de  $i$  ( $i$  selon le pouce,  $\vec{B}$  selon l'index et  $\vec{F}_L$  selon le majeur de la main droite).

Phase 2: la luge est entièrement dans la zone de champ magnétique, le flux du champ magnétique ne varie pas, il n'y a pas d'induction, et donc pas de freinage.

Phase 3: la luge sort de la zone de champ magnétique, la surface de la luge dans la zone de champ magnétique diminue, pour s'opposer à la diminution du flux magnétique, il apparaît un champ magnétique induit dans le sens de  $\vec{B}$ , le courant qui crée ce champ tourne dans le sens trigo dans le cadre soit  $i > 0$ .

On peut raisonner sur la force de Laplace, qui dans cette phase s'exerce sur le côté à l'arrière de la luge, côté plongé dans le champ magnétique. La force de Laplace freine là aussi le cadre.

3. Le champ magnétique terrestre est de l'ordre de  $5.10^{-5} \text{ T}$ . Un champ de  $1 \text{ T}$  est un champ très intense que l'on peut produire grâce à un solénoïde, un solénoïde supraconducteur (de résistance nulle) pour qu'il n'y ait pas d'effet Joule). En effet pour produire un fort champ magnétique, il faut une grande intensité et avec une forte intensité, l'effet Joule est important et peut faire fondre les matériaux.

4. Le flux du champ magnétique s'écrit  $\phi = \iint \vec{B} dS \vec{n}$  avec ici  $\vec{n} = +\vec{u}_z$  (orienté par  $i$  à partir de la règle de la main droite) soit  $\phi = Blx$ . On applique la loi de Faraday soit  $e = -\frac{d\phi}{dt} = -Bl\dot{x} = -Blv$ .

5. Le circuit équivalent présente une résistance  $R_c$  et une fem  $e$  dans le sens de  $i$  (pas de bobine car on néglige l'auto-induction). La loi des mailles donne  $e = R_c i$  soit  $i = \frac{-Blv}{R_c} < 0$ : cette équation électrique contient le terme mécanique  $v$ .

6. La luge subit son poids et la réaction du support (qui ici compense le poids car le mouvement est dans le plan horizontal), ainsi que la force de Laplace. Sur les côtés  $CD$  et  $EF$  les forces de Laplace se compensent, sur le côté  $FC$  elle est nulle car il n'y a pas de champ magnétique, elle s'écrit donc  $\vec{F}_L = i \overrightarrow{DE} \wedge \vec{B} = i l \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_z = i l B \vec{u}_z$ .

La RFD appliquée à la luge s'écrit:  $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_L$  soit en projection sur  $Ox$   $m \frac{dv}{dt} = ilB$ : cette équation mécanique contient le terme électrique  $i$ .

On déduit des équations trouvées:  $\frac{dv}{dt} + \frac{B^2 l^2}{mR_c} v = 0$ . Par identification avec l'énoncé on trouve  $\tau = \frac{mR_c}{B^2 l^2}$ .

7. La solution est  $v(t) = Ae^{-t/\tau}$  avec  $v(t=0) = v_a = A$  d'où  $v(t) = v_a e^{-t/\tau}$  et en intégrant par rapport au temps  $x(t) = -v_a \tau e^{-t/\tau} + C$  avec  $x(t=0) = 0 = -v_a \tau + C$  d'où  $x(t) = v_a \tau (1 - e^{-t/\tau})$ .

La luge est totalement dans la zone de champ magnétique à partir de l'instant  $T$  tel que  $x(T) = L = v_a \tau (1 - e^{-T/\tau})$  d'où  $T = -\tau \ln(1 - \frac{v_a \tau}{L})$ . A cet instant la vitesse de la luge est  $v(T) = v_a e^{-T/\tau} = v_a (1 - \frac{Lv_a}{\tau}) = v_a - \frac{L}{\tau}$ . On en déduit la variation de vitesse de la luge lors de la phase 1:  $v(T) - v_a = -\frac{L}{\tau} = -2,5 \text{ m.s}^{-1}$ .

8. Une fois que le cadre est entièrement dans la zone de champ magnétique, le flux magnétique ne varie plus donc la vitesse du cadre est constante, il n'y a plus d'induction. Ainsi cette phase n'apporte aucune contribution au freinage, sa taille doit être la plus petite possible pour limiter la longueur de la piste de freinage. La taille idéale de la zone de champ magnétique est donc  $L$ , la taille du cadre.

9. Lors de la phase 3, le cadre sort de la zone de freinage, le courant dans le cadre change de sens pour freiner le cadre à nouveau. La variation de vitesse du cadre lors de cette phase est à nouveau  $\Delta v = -\frac{L}{\tau}$ .

10. A chaque passage dans une zone de champ magnétique, la luge est freinée deux fois: une fois lors de la phase d'entrée dans la zone et une fois lors de la phase de sortie de la zone soit pour chaque zone, la variation de vitesse de la luge est  $\Delta v_{zone} = -\frac{2L}{\tau} = -5 \text{ m.s}^{-1}$ .

Pour que la luge passe de la vitesse  $v_a = 30 \text{ m.s}^{-1}$  à la vitesse de  $5 \text{ m.s}^{-1}$ , il faut donc 5 zones de champ magnétique, qui sont longues de  $L$  et qui doivent être espacées de  $L$  également pour que la piste soit la plus courte possible. La longueur de piste de ralentissement est donc  $10L = 10 \text{ m}$ . Si l'on compare à la distance  $L = 460 \text{ m}$  de la zone de freinage en absence d'induction établie dans la question 1, on voit combien l'induction est efficace pour le freinage.

11. Les camions utilisent le freinage par induction. En freinant, le conducteur actionne l'électroaimant qui crée un champ magnétique permanent solidaire de la carcasse du camion. Un disque solidaire des roues est donc le siège de courants induits qui freinent de façon très efficace le camion. Ce système de freinage doit être doublé d'un système mécanique de blocage des roues lorsque le camion est à l'arrêt car l'induction en fonctionne que lorsque le camion a une vitesse, pour maintenir le camion arrêté ce système ne convient pas.

### III. Transmission sans fil

1. Equation de Maxwell Thomson:  $\text{div } \vec{B} = 0$

Equation de Maxwell Ampère:  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ .

Dans l'ARQS, on néglige le courant de déplacement  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  devant le courant de conduction  $\vec{j}$  soit  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ .

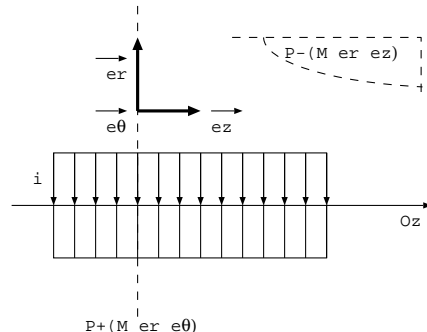
2. On écrit le théorème de Stokes:  $\oint \vec{B}(M, t) d\vec{OM} = \iint \text{rot } \vec{B}(P, t) dS(P) \vec{n}(P) = \mu_0 \iint \vec{j} dS(P) \vec{n}(P) = \mu_0 I_{enlacs}$ .

C'est le théorème d'Ampère selon lequel la circulation du champ magnétique sur un contour fermé et orienté est égal à  $\mu_0$  fois les courants enlacés par ce contour.

3. Le solénoïde peut être considéré infini pour  $l \gg a$ .

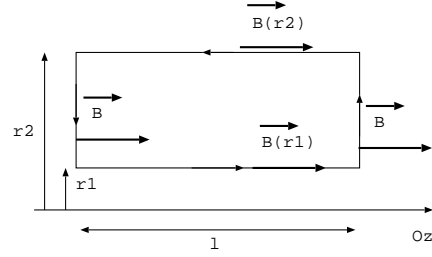
4. Il y a invariance par rotation autour de  $Oz$  et par translation selon  $Oz$  donc  $B$  ne dépend que de  $r$ .

$M$  appartient aux plans  $P^+(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  et  $P^-(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  donc  $\vec{B}(M)$  est perpendiculaire à  $P^+$  et appartient à  $P^-$  soit  $\vec{B}$  est selon  $\vec{e}_z$ .



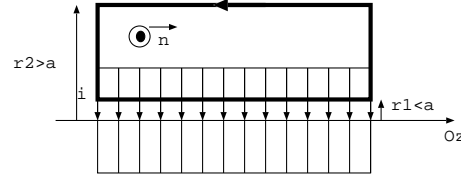
On a donc  $\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_z$ . Les lignes de champ magnétique sont des droites parallèles à  $Oz$ .

5. On prend un contour d'Ampère rectangulaire, le plan du rectangle contient l'axe  $Oz$ . La circulation de  $\vec{B}$  sur ce contour s'écrit:  $\mathcal{C} = \oint \vec{B}(M)d\vec{OM} = B(r_1)l - B(r_2)l$ .



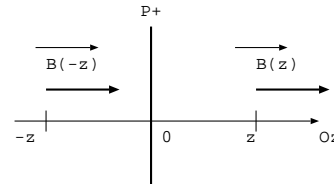
Lorsque l'on met ce contour dans le solénoïde ( $r_1 < r_2 < a$ ) il n'y a pas de courants enlacés donc  $\mathcal{C} = 0$  soit  $B(r_1) = B(r_2)$ : le champ magnétique dans le solénoïde est nul.

Lorsque l'on met ce contour à cheval sur le solénoïde ( $r_1 < a < r_2$ ) on a  $\mathcal{C} = \mu_0 Ni = B(r_1)l - B(r_2)l$  avec  $B(r_2) = 0$  (à l'extérieur) et  $B(r_1)$  est le champ intérieur donc  $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{l} i \vec{e}_z$ .



6. Tout plan passant par  $Oz$  est plan  $P^-$  donc  $\vec{B}(M)$  appartient à tous ces plans soit  $\vec{B}(M)$  est selon  $Oz$ .

7. Le plan  $z = 0$  est un plan  $P^+$  pour les courants donc en deux points symétriques par rapport à ce plan, les champs magnétiques sont antisymétriques, d'après le schéma on a  $\vec{B}(-z) = +\vec{B}(z)$ .

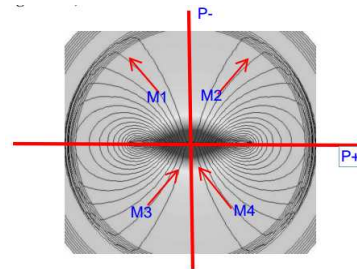


8.  $B$  est maximal au centre de la bobine et est nulle lorsqu'on est loin de la bobine soit  $B_{max} = \frac{\mu_0 Ni(t)}{2a} \vec{e}_z$ .

On résout  $B(z) = \frac{\mu_0 Ni(t)a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 Ni(t)}{4a}$  soit  $2a^3 = (a^2 + z^2)^{3/2}$  ou encore  $2^{2/3}a^2 = a^2 + z^2$  et  $z^2 = a^2(2^{2/3} - 1)$  ou encore  $z = \pm a\sqrt{2^{2/3} - 1} = 0,77a$ .

9.  $M_1$  et  $M_2$  sont symétriques par rapport à un plan  $P^-$  donc leurs champs magnétiques sont symétriques par rapport à ce plan.

$M_1$  et  $M_3$  sont symétriques par rapport à un plan  $P^+$  donc leurs champs magnétiques sont antisymétriques par rapport à ce plan.



10. Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est nul, on dit que  $\vec{B}$  est à flux conservatif, ce qui a pour conséquence que lorsque les lignes de champ s'écartent la norme de  $\vec{B}$  diminue et lorsque les lignes de champ se resserrent, la norme de  $\vec{B}$  augmente. C'est une conséquence de l'équation de Maxwell-Thomson. A l'intérieur du solénoïde, les lignes de champ sont parallèles, le champ y est uniforme. Elles sont plus serrées, le champ est plus intense dans le solénoïde.

11. La bobine est modélisée par une association série inductance-résistance. La puissance reçue est le produit  $u.i$  dans la bobine en convention récepteur soit avec  $u = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt}$ . On a donc pour la puissance reçue  $P_{recue} = R_1 i^2 + L_1 i \frac{di}{dt} = R_1 I_0^2 \cos^2(\omega t) - L_1 I_0^2 \omega \cos(\omega t) \sin(\omega t)$ . En valeur moyenne on a  $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$  et  $\langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = 0$  d'où la puissance moyenne reçue par la bobine émettrice  $P_{recue} = R_1 \frac{I_0^2}{2}$ .

12. Je choisis d'orienter la bobine 2 par le vecteur  $\vec{n} = \vec{e}_z$ , le flux magnétique s'écrit  $\phi = N_2 \iint B(M) \vec{e}_z dS(M) \vec{e}_z$

avec  $B(M) = B(z = d) = \frac{\mu_0 N_1 i(t) a^2}{2(a^2 + d^2)^{3/2}}$  uniforme dans la bobine (c'est l'hypothèse de l'énoncé) on a donc

$$\phi = B(d) \pi b^2 = \frac{\mu_0 N_2 N_1 i(t) a^2 \pi b^2}{2(a^2 + d^2)^{3/2}}.$$

13. On applique la loi de Faraday  $e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 N_2 N_1 di/dt a^2 \pi b^2}{2(a^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 N_2 N_1 I_0 \omega \sin(\omega t) a^2 \pi b^2}{2(a^2 + d^2)^{3/2}}$ . La loi

de Faraday vient de l'équation locale de Maxwell Faraday  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , c'est la loi de l'induction, qui dit qu'un champ électrique peut être créé par des champs magnétiques variables.

14. La bobine réceptrice se comporte comme un générateur de fem  $e(t)$ , le circuit équivalent de la bobine émettrice comporte la fem en série avec la résistance  $R_2$  (on néglige le phénomène d'auto-induction).

La puissance reçue est  $P_{gene} = R_2 i_2^2$  avec d'après la loi des mailles  $e = R_2 i_2$  soit  $P_{gene} = \frac{e(t)^2}{R_2} =$

$$\frac{\mu_0^2 N_2^2 N_1^2 I_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) a^4 \pi^2 b^4}{4(a^2 + d^2)^3 R_2}$$
 soit en valeur moyenne par rapport au temps  $\langle P_{gene} \rangle = \frac{\mu_0^2 N_2^2 N_1^2 I_0^2 \omega^2 a^4 \pi^2 b^4}{8(a^2 + d^2)^3 R_2}$ .

On en déduit le rendement  $\eta = \frac{\mu_0^2 N_2^2 N_1^2 \omega^2 a^4 \pi^2 b^4}{4(a^2 + d^2)^3 R_2 R_1}$  soit en identifiant avec l'énoncé  $k = \frac{\pi^2}{4}$ .

15. On lit  $f_{max} = 15 \text{ kHz}$  et  $\eta_{max} \approx 0,073$ .

La loi de Yates prévoit que le rendement est proportionnel au carré de la fréquence puisque  $\omega = 2\pi f$ . Aussi à BF la courbe expérimentale montre que le rendement est proportionnel à la fréquence et à HF le rendement diminue, ce n'est pas du tout en accord avec la loi de Yates.

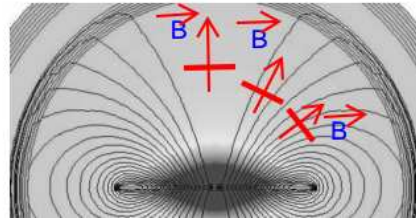
16. La pulsation propre du circuit  $RLC$  série est  $\omega_0 = \frac{1}{LC}$ . On applique donc ici  $\omega_{max} = 2\pi f_{max} = \frac{1}{LC_p}$

soit  $C_p = \frac{1}{4\pi^2 L f_{max}^2} = 10,13 \mu F$ .

17. Pour un distance  $d$  donnée, plus on désaligne les bobines et plus le rendement est faible. C'est tout à fait cohérent avec le fait que le champ magnétique est maximal sur l'axe de la bobine (c'est là où les lignes de champ sont le plus serrées), lorsqu'on s'éloigne de l'axe les lignes de champ magnétiques s'écartent, le champ magnétique diminue et donc le flux du champ magnétique créé par la bobine émettrice, à travers la bobine réceptrice diminue, le rendement du couplage est moins bon.

On observe aussi que le rendement est plus élevé lorsque les bobines sont plus proches l'une de l'autre ( $d$  petit), en effet le champ magnétique créé par la bobine émettrice est maximal au centre de la bobine, il diminue quand on s'éloigne de la bobine, donc le flux et le rendement diminuent également.

18. On observe là aussi que le rendement est de plus en plus faible lorsqu'on éloigne les bobines l'une de l'autre. En revanche, lorsqu'on incline la bobine le rendement est inchangé. Les lignes de champ s'inclinent aussi sur les côtés de la bobine, elles restent à peu près à la même distance les unes des autres, donc la norme de  $B$  est inchangé et elles sont perpendiculaires à la surface de la bobine donc le flux ne varie pas.



#### IV. Dimensionnement d'un câble électrique

1. Equation de maxwell Gauss  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ , Equation de maxwell Thomson  $\text{div} \vec{B} = 0$ , Equation de Maxwell Faraday  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  et équation de Maxwell Faraday  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_c + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

2. L'électron subit son poids, la force électrique  $\vec{F}_e = -e \vec{E}$ , la force magnétique  $\vec{F}_m = -e \vec{v} \wedge \vec{B}$  et la force de frottements  $\vec{f} = -\frac{m_e}{\tau} \vec{v}$ .

Le rapport du poids et de la force électrique s'écrit:  $\frac{m_e g}{eE} = \frac{10^{-10}}{E} \ll 1$  sachant que les champs électriques sont de l'ordre de  $10^3 \text{ V.m}^{-1}$ . On peut donc négliger le poids devant la force électrique.

La RFD appliquée à un électron s'écrit:  $m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E} - e \vec{v} \wedge \vec{B} - \frac{m_e}{\tau} \vec{v}$ .

3. On cherche un ordre de grandeur du rapport de la force magnétique sur la force électrique soit:

$\frac{F_m}{F_e} \approx \frac{evB}{eE} \approx \frac{v}{c} \ll 1$  car l'électron n'est pas relativiste donc sa vitesse  $v$  est négligeable devant la vitesse de la lumière.

La RFD appliquée à l'électron s'écrit:  $m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{E} - \frac{m_e}{\tau} \vec{v}$ .

4. En notation complexe  $\frac{d}{dt} = j\omega$ . La RFD devient:

$$j\omega m_e \vec{v} = -e \vec{E} - \frac{m_e}{\tau} \vec{v} \text{ soit } \vec{v} = \frac{-e\tau}{1 + j\omega\tau} \vec{E}.$$

On en déduit le vecteur densité de courant par  $\vec{j}_c = n_0(-e)\vec{v} = \frac{n_0 e^2 \tau}{1 + j\omega\tau} \vec{E}$  de la forme  $\vec{j}_c = \underline{\gamma} \vec{E}$ . On a

donc  $\underline{\gamma} = \frac{n_0 e^2 \tau}{1 + j\omega\tau}$  soit par identification avec l'énoncé  $\gamma_0 = \frac{n_0 e^2 \tau}{m_e}$ . AN:  $\gamma_0 = 10^8 \text{ S.m}^{-1}$ .

5.  $\omega\tau = 2\pi f\tau \approx 3.10^{-12} \ll 1$ , on peut donc négliger  $\omega\tau$  devant 1 au dénominateur de  $\underline{\gamma}$  soit  $\underline{\gamma} = \gamma_0$ .

6. Le courant de déplacement est  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  soit en ordre de grandeur  $\frac{\epsilon_0 E}{T} = \epsilon_0 f E$ .

Le courant de conduction est  $\vec{j}_c = \gamma_0 E$ .

Ainsi le rapport du courant de déplacement sur le courant de conduction s'écrit  $\frac{\epsilon_0 f E}{\gamma_0 E} = \frac{\epsilon_0 f}{\gamma_0} \approx 10^{-18} \ll 1$ , on peut donc négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction, l'équation de Maxwell Ampère s'écrit  $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_c$ .

7.  $\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$  avec  $\vec{j}_c = \gamma_0 \vec{E}$

Soit en utilisant Maxwell gauss et Maxwell Faraday:

$$\text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot} \vec{B}) = -\Delta \vec{E}$$

Soit en utilisant la loi d'ohm et Maxwell Ampère:

$$-\mu_0 \frac{\partial \vec{j}_c}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma_0} \Delta \vec{j}_c$$

$$\text{d'où } \Delta \vec{j}_c - \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{j}_c}{\partial t} = \vec{0}$$

C'est une équation de diffusion. Par analyse dimensionnelle on a  $\frac{j_c}{\delta^2} = \mu_0 \gamma_0 \frac{j_c}{T} = \mu_0 \gamma_0 j_c f$  soit  $\delta = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \gamma_0 f}} \approx 1 \text{ cm}$ .

8. Pour  $b > \delta$ , on a  $I(b)/I_{tot} \approx 1$ , ce qui signifie que la totalité du courant passe par la petite épaisseur  $b$  sur le bord du câble. Le rayon optima du câble est  $R_c \approx \delta$  pour que tout le volume du câble serve à transporter le courant.