TD électrostatique

I. **Etude d'une carte de champ**

1. Au point $A(x=-1, y=0)$ les lignes de champ divergent donc il y a une charge positive q_A.

Au point $B(x=+1, y=0)$ les lignes de champ divergent donc il y a une charge positive q_B.

2. Au point $C(x=-0,5, y=1)$ les lignes de champ se coupent avec des lignes qui convergent et des lignes qui divergent.

Le champ en C s'écrit $\overrightarrow{E}(C) = \dfrac{q_A}{4\pi\epsilon_0 AC^2}\overrightarrow{u}_{A\to C} + \dfrac{q_B}{4\pi\epsilon_0 BC^2}\overrightarrow{u}_{B\to C} = \dfrac{q_A}{4\pi\epsilon_0 AC^2}\overrightarrow{e_x} + \dfrac{q_B}{4\pi\epsilon_0 BC^2}(-\overrightarrow{e_x}) = \overrightarrow{0}$ soit $\dfrac{q_A}{CA^2} = \dfrac{q_B}{BC^2}$ soit $\dfrac{q_A}{0,5^2} = \dfrac{q_B}{1,5^2}$ soit $9q_A = q_B$.

II. **Utilisation des symétries**

Questions 1 et 2- Le plan $P_1(Oyz)$ est un plan P^+, le symétrique de $M(x,y)$ par rapport à ce plan a pour coordonnées $M_1(-x,y)$. En deux points symétriques par rapport à un plan P^+, les potentiels sont égaux donc $V(x,y) = V(-x,y)$ soit $V_0 + \alpha x + \beta y + \gamma xy + \delta x^2 + \chi y^2 = V_0 - \alpha x + \beta y - \gamma xy + \delta(-x)^2 + \chi y^2$. Après simplification il reste $2\alpha x + 2\gamma xy = 0$ soit $\alpha + \gamma y = 0$ qui doit être nul pour tout y donc $\alpha = \gamma = 0$.

On procède de la même façon avec le plan $P_2(Oxz)$ qui est un plan P^+, le symétrique de $M(x,y)$ par rapport à ce plan a pour coordonnées $M_2(x,-y)$. En deux points symétriques par rapport à un plan P^+, les potentiels sont égaux donc $V(x,y) = V(x,-y)$ soit $V_0 + \beta y + \delta x^2 + \chi y^2 = V_0 - \beta y + \delta x^2 + \chi(-y)^2$. Après simplification il reste $2\beta y = 0$ qui doit être nul pour tout y donc $\beta = 0$.

Soit le plan P_3 passant par Oz et par la bissectrice de xOy, ce plan est P^+. Le symétrique de $M(x,y)$ par ce plan a pour coordonnées $M_3(y,x)$ soit $V(x,y) = V(y,x)$ donc $V_0 + \delta x^2 + \chi y^2 = V_0 + \delta y^2 + \chi x^2$, qui donne $(x^2 - y^2)(\delta - \chi) = 0$ qui doit être nul pour tout x et y donc $\delta = \chi$.

Le potentiel s'écrit donc $V(x,y) = V_0 + \delta(x^2 + y^2)$.

3- V_0 est le potentiel pour $x = y = 0$ soit le potentiel en O, on a donc $V_0 = \dfrac{4q}{4\pi\epsilon_0 a} = \dfrac{q}{\pi\epsilon_0 a}$.

4- On applique $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\dfrac{\partial V}{\partial x}\overrightarrow{e_x} - \dfrac{\partial V}{\partial y}\overrightarrow{e_y} = -2\delta(x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y}) = -2\delta\overrightarrow{OM} = -2\delta r\overrightarrow{e_r}$.

III. **Deux spires**

1. M appartient aux plans $P^+(M, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$ et $P^+(M, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ donc le champ électrique en M appartient à ces plans donc le champ électrique en M est selon Oz.

O appartient aux plans $P^+(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$, $P^+(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$ et $P^+(O, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ donc le champ électrique en O appartient à ces plans donc le champ électrique en O est nul.

2. Les points $M(z)$ et $M'(-z)$ sont symétriques par rapport au plan $P^+(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$, en deux points symétriques par rapport à un plan P^+ les potentiels sont égaux et les champs électriques sont symétriques. On a donc $V(-z) = V(z)$. Le champ électrique en z est selon $+Oz$, en $-z$ son symétrique est selon $-Oz$ donc $\overrightarrow{E}(-z) = -\overrightarrow{E}(z)$.

3. Toutes les charges de la spire sont à la même distance $\sqrt{R^2 + z^2}$ de M donc le potentiel en M s'écrit $V(z) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + z^2}}$.

On applique $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\dfrac{dV}{dz}\overrightarrow{e_z} = \dfrac{Qz}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + z^2}^3}\overrightarrow{e_z}$.

On vérifie que $V(-z) = V(z)$ et $\overrightarrow{E}(-z) = -\overrightarrow{E}(z)$.

4. La spire de charge $+Q$ placée en $z = 0$ crée en z le champ $\overrightarrow{E} = \dfrac{Qz}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + z^2}^3}\overrightarrow{e_z}$.

Donc la spire de charge $+Q$ placée en $z = -a$ crée en z le champ $\overrightarrow{E_+} = \dfrac{Q(z+a)}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + (z+a)^2}^3}\overrightarrow{e_z}$.

Donc la spire de charge $-Q$ placée en $z = +a$ crée en z le champ $\overrightarrow{E_-} = \dfrac{-Q(z-a)}{4\pi\epsilon_0\sqrt{R^2 + (z-a)^2}^3}\overrightarrow{e_z}$.

Le champ créé par les eux spires est la somme des champs créés par chacune des spires donc $\vec{E}(M) = \vec{E_+} + \vec{E_-}$.

IV. **Le gecko**

1. Dans la molécule HCl, le chlore est plus électronégatif que l'hydrogène donc il attire à lui les électrons de la liaison et le chlore porte une charge négative et l'hydrogène une charge positive. Il apparaît un moment dipolaire dirigé du chlore vers l'hydrogène.

D'après le schéma on a $\vec{p_1} = aq\vec{U_z}$.

2. On applique le théorème de superposition: $V_1(M) = V_P(M) + V_N(M) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 PM} + \dfrac{-q}{4\pi\epsilon_0 NM}$.

On a $PM^2 = (\vec{PO} + \vec{OM})^2 = PO^2 + OM^2 + 2\vec{PO}.\vec{OM} = \dfrac{a^2}{4} + r^2 + 2\dfrac{a}{2}r\cos(\pi - \theta) = r^2(1 - \dfrac{a}{r}\cos\theta + \dfrac{a^2}{4r^2})$.

On en déduit $\dfrac{1}{PM} = \dfrac{1}{r}(1 - \dfrac{a}{r}\cos\theta + \dfrac{a^2}{4r^2})^{-1/2} \approx \dfrac{1}{r}(1 + \dfrac{a}{2r}\cos\theta$ dans l'approximation dipolaire on fait une observation lointaine du champ soit $r >> a$ et on fait des DL à l'ordre le plus bas non nul en $\dfrac{a}{r}$.

De la même façon on obtient $\dfrac{1}{NM} \approx \dfrac{1}{r}(1 - \dfrac{a}{2r}\cos\theta$.

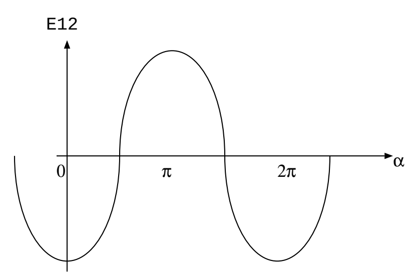
On remplace dans l'expression du potentiel et on a $V_1(M) = \dfrac{qa\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \dfrac{p_1\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

3. On trouve le champ électrique en appliquant $\vec{E_1}(M) = -\vec{\text{grad}}V_1(M) = \dfrac{\partial}{\partial r}(\dfrac{p_1\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2})\vec{U_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\dfrac{p_1\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2})\vec{U_\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\phi}(\dfrac{p_1\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2})\vec{U_\phi} = \dfrac{p_1}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\vec{U_r} + \sin\theta\vec{U_\theta})$.

4. Le couple fait tourner le dipôle $\vec{p_2}$ jusqu'à ce qu'il soit aligné dans la direction du champ électrique créé en M par $\vec{p_1}$.

Le champ électrique créé en M par $\vec{p_1}$ a pour expression $\vec{E_1}(M) = \dfrac{p_1}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2\cos 0\vec{U_r}(\theta = 0) + \sin 0\vec{U_\theta}(\theta = 0)) = \dfrac{p_1}{2\pi\epsilon_0 r^3}\vec{U_z}$.

On en déduit l'énergie potentielle d'interaction entre le dipôle $\vec{p_2}$ et le champ électrique créé en M par $\vec{p_1}$ soit $E_{12} = -\vec{p_2}.\vec{E_1} = -\dfrac{p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 r^3}\cos\alpha$. On peut tracer cette fonction en fonction de α. Les positions d'équilibre correspondent à un minimum d'énergie potentielle soit ici $\alpha = 0$ lorsque $\vec{p_2}$ est colinéaire de même sens que $\vec{E_1}$ et les positions d'équilibre instable à un maximum d'énergie potentielle soit ici $\alpha = \pi$ lorsque $\vec{p_2}$ est colinéaire de sens contraire à $\vec{E_1}$.



5. AN: $E_{12} = -\dfrac{p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 r^3} = 1,6.10^{-21}\ J$ pour $\alpha = 0$

AN: énergie d'agitation thermique $E = k_B T = 4,0.10^{-21}\ J$.

L'énergie d'interaction entre les dipôles les tend à aligner le dipôle $\vec{p_2}$ selon la direction Oz du champ $\vec{E_1}(M)$ et l'énergie thermique tend à faire bouger le dipôle $\vec{p_2}$ dans tous les sens. On voit ici que l'énergie thermique est plus importante que l'énergie d'interaction des dipôles donc le dipôle $\vec{p_2}$ tourne sans cesse.

6. AN: $C_k = 10^{-77}\ J.m^6$. On déduit la force d'interaction de l'énergie potentielle par $\vec{F}_{1/2} = -\dfrac{d < E_{12} >}{dr}\vec{U_r}(\theta = 0) = -\dfrac{C_k}{r^7}\vec{U_z}$. Cette force est selon $-\vec{U_z}$, elle est donc attractive.

7. $f(D)$ est une force surfacique soit en $[f] = N.m^{-2} = kg.m.s^{-2}.m^{-2} = kg.s^{-2}.m^{-1}$. On en déduit l'unité de A soit $[A] = [fD^3] = kg.s^{-2}.m^2 = [mv^2]$ c'est bien homogène à une énergie.

8. Le gecko est à l'équilibre au plafond sous l'action de son poids et des forces de Van der Waals, à l'équilibre ces forces se compensent soit $mg = f(D)Na^2$ où N est le nombre de spatules utilisées et $a = 0,2\ \mu m$ la largeur d'une spatule soit a^2 la surface d'une spatule.

On a donc $N = \dfrac{mg}{f(D)a^2} = \dfrac{mg6\pi D^3}{Aa^2} = 2,36.10^6\ spatules$.

Le pourcentage de spatules utilisées est donc $\dfrac{N}{6.10^6.500} = 8.10^{-4} = 0,08$ %.