Correction TD Gauss

I. Exercice IV: Equation de Poisson

Maxwell Faraday: $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ (en électrostatique) donc il existe un potentiel V tel que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$.

Maxwell Gauss: $\text{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ qui donne $-\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\text{V}) = -\Delta\text{V} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ soit l'équation de Poisson: $\Delta V = \dfrac{-\rho}{\epsilon_0}$.

Il y a invariance par rotation autour du point O donc le potentiel ne dépend ni de θ, ni de ϕ soit $V = V(r)$ et $\Delta V = \dfrac{1}{r}\dfrac{d^2(rV)}{dr^2}$.

A l'intérieur de la sphère on doit résoudre $\Delta V = \dfrac{1}{r}\dfrac{d^2(rV)}{dr^2} = -\dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ soit $\dfrac{d^2(rV)}{dr^2} = -\dfrac{\rho r}{\epsilon_0}$.

On primitive deux fois par rapport à r: $rV(r) = -\dfrac{\rho r^3}{6\epsilon_0} + Ar + B$ soit $V(r) = -\dfrac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + A + \dfrac{B}{r}$.

Le terme B/r diverge quand r tend vers 0 donc on doit prendre $B = 0$.

D'après l'énoncé $V(r = 0) = V_0 = A$ donc $V(r) = -\dfrac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + V_0$.

A l'extérieur de la sphère on doit résoudre $\Delta V = \dfrac{1}{r}\dfrac{d^2(rV)}{dr^2} = 0$ soit $\dfrac{d^2(rV)}{dr^2} = 0$.

On primitive deux fois par rapport à r: $rV(r) = Cr + D$ soit $V(r) = C + \dfrac{D}{r}$. On a $C = 0$ car le potentiel est nul loin de la sphère.

On trouve la constant D en écrivant la continuité du potentiel en $r = R$: $V(r = R^-) = V(r = R^+)$ soit $-\dfrac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + V_0 = \dfrac{D}{R}$, on en déduit D.

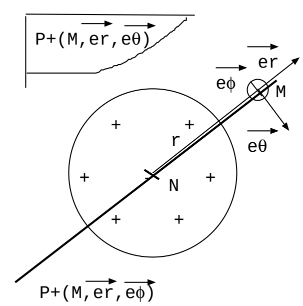
II. Exercice VII: Symétrie sphérique

1. On repère M par ses coordonnées sphériques.

M appartient aux plans $P^+(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ et $P^+(M, \vec{e_r}, \vec{e_\phi})$ donc $\vec{E}(M)$ appartient ces plans donc $\vec{E}(M)$ est selon $\vec{e_r}$.

Il y a invariance par rotation autour de tout axe passant par O donc le champ électrique ne dépend que de r.

On a donc $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e_r}$.



L'équation de Maxwell Gauss s'écrit $\text{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ (en toute rigueur on devrait plutôt écrire $\text{div}\vec{E}(\text{M}) = \dfrac{\rho(\text{M})}{\epsilon_0}$).

Le champ électrique s'écrit $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e_r}$ donc $E_r = E(r)$, $E_\theta = E_\phi = 0$ soit $\text{div}\vec{E} = \dfrac{1}{\text{r}^2}\dfrac{\text{d}(\text{r}^2\text{E}(\text{r}))}{\text{dr}} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$.

A l'intérieur de la sphère, pour $r < b$, la charge est uniformément répartie donc la densité volumique de charge est uniforme et s'écrit $\rho = \dfrac{Q}{\frac{4\pi b^3}{3}} = \dfrac{3Q}{4\pi b^3}$.

On doit donc résoudre $\text{div}\vec{E} = \dfrac{1}{\text{r}^2}\dfrac{\text{d}(\text{r}^2\text{E}(\text{r}))}{\text{dr}} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$

Soit $\dfrac{d(r^2E(r))}{dr} = \dfrac{\rho r^2}{\epsilon_0}$

En primitivant: $r^2E(r) = \dfrac{\rho r^3}{3\epsilon_0} + A$

d'où: $E(r) = E_+(r) = \dfrac{\rho r}{3\epsilon_0} + \dfrac{A}{r^2}$

Le terme $\frac{A}{r^2}$ diverge quand r tend vers zéro donc on doit prendre $A = 0$ donc $E(r) = E_+(r) = \dfrac{\rho r}{3\epsilon_0}$.

A l'extérieur de la sphère, pour $r > b$, il n'y a pas de charge donc $\rho = 0$.

On doit donc résoudre $\mathrm{div}\overrightarrow{E} = \frac{1}{\mathrm{r}^2}\frac{\mathrm{d(r^2E(r))}}{\mathrm{dr}} = 0$

Soit $\frac{d(r^2E(r))}{dr} = 0$

En primitivant: $r^2E(r) = B$ et $E(r) = \frac{B}{r^2}$.

On trouve la constante B en écrivant la continuité du champ électrique en $r = b$ soit $E_+(r = b) = E_-(r = b)$ soit $\frac{\rho b}{3\epsilon_0} = \frac{B}{b^2}$ soit $B = \frac{\rho b^3}{3\epsilon_0}$ et $E_-(r) = \frac{\rho b^3}{3\epsilon_0 r^2}$.

2. Application 1: la distribution de charges est équivalente à une grande sphère de centre O_1 chargée positivement avec une densité volumique de charges $+\rho$ (distribution D_1) et une petite sphère de centre O_2 chargée négativement avec une densité volumique de charges $-\rho$ (distribution D_2).

Pour la suite on utilise l'expression du champ $\overrightarrow{E_+}(M) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\overrightarrow{e_r}$ avec $r\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{OM}$ donc $\overrightarrow{E_+}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon}\overrightarrow{OM}$.

Le champ électrique en un point M de la cavité de la distribution D est égale à la somme du champ électrique créé en M par D_1 soit $E_1(r) = \frac{\rho}{3\epsilon}\overrightarrow{O_1M}$ et du champ électrique créé en M par D_2 soit $E_2(r) = \frac{-\rho}{3\epsilon}\overrightarrow{O_2M}$.

On a donc $\overrightarrow{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon}\overrightarrow{O_1M} - \frac{\rho}{3\epsilon}\overrightarrow{O_2M} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}(\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}$: le champ dans la cavité est uniforme, il ne dépend pas de M, il est dirigé selon $\overrightarrow{O_1O_2}$.

3. Application 2:

3.a. Le champ créé par le noyau de charge $Q = +e$ en M à l'intérieur de la sphère de rayon a est $\overrightarrow{E_+} = \frac{er}{4\pi a^3\epsilon_0}\overrightarrow{e_r} = \frac{e}{4\pi a^3\epsilon_0}\overrightarrow{OM}$ car $r\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{OM}$.

3.b. L'électron subit la force électrique $\overrightarrow{F_e} = -e\overrightarrow{E_+} = \frac{-e^2}{4\pi a^3\epsilon_0}\overrightarrow{OM}$ et son poids que l'on néglige devant la force électrique.

On applique la RFD à l'électron $m\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{-e^2}{4\pi a^3\epsilon_0}\overrightarrow{OM}$ soit $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} + \frac{e^2}{m4\pi a^3\epsilon_0}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{0}$.

3.c. Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{m4\pi a^3\epsilon_0}}$. On en déduit la fréquence ds oscillations par $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

III. Exercice IX: Polarisabilité électronique d'un atome

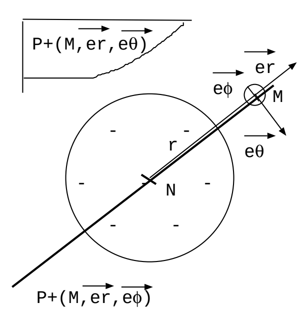
1. Soit la sphère de centre N, de rayon a portant la charge $-Ze$ uniformément répartie. A l'intérieur de la sphère la densité volumique de charges est uniforme et s'écrit $\rho = \frac{-Ze}{\frac{4\pi a^3}{3}} = \frac{-3Ze}{4\pi a^3}$ et à l'extérieur de la sphère, la densité volumique de charges est nulle.

On repère M par ses coordonnées sphériques.

M appartient aux plans $P^+(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ et $P^+(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\phi})$ donc $\overrightarrow{E}(M)$ appartient ces plans donc $\overrightarrow{E}(M)$ est selon $\overrightarrow{e_r}$.

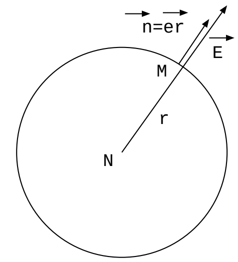
Il y a invariance par rotation autour de tout axe passant par O donc le champ électrique ne dépend que de r.

On a donc $\overrightarrow{E}(M) = E(r)\overrightarrow{e_r}$.



2

On choisit pour surface de Gauss une sphère de centre N et de rayon $r = OM$: $\Phi = \oiint \overrightarrow{E}(M) dS(M) \overrightarrow{n}(M) = \oiint E(r)\overrightarrow{e_r} dS \overrightarrow{e_r} = E(r) \oiint dS = E(r) 4\pi r^2$.

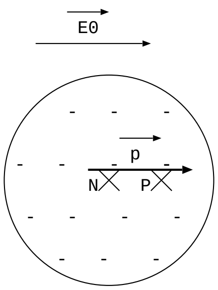


On applique le théorème de Gauss: $\Phi = E(r)4\pi r^2 = \dfrac{Q_{int}}{\epsilon_0}$. Dans le cas où $r < a$, la charge intérieure est la charge contenue dans la sphère de rayon r soit $Q_{int} = \rho \dfrac{4\pi r^3}{3} = \dfrac{-Zer^3}{a^3}$.

On a donc $\Phi = E(r)4\pi r^2 = \dfrac{-Zer^3}{a^3 \epsilon_0}$ soit $\overrightarrow{E}(M) = \dfrac{-Zer}{4\pi\epsilon_0 a^3}\overrightarrow{e_r}$.

2. Le nuage électronique se déplace dans le sens opposé à $\overrightarrow{E_0}$, le noyau est très lourd par rapport aux électrons c'est pour cela qu'on néglige son déplacement.

Le noyau subit la force électrique $\overrightarrow{F_e} = Ze(\overrightarrow{E_0} + \overrightarrow{E})$ et son poids que l'on néglige par rapport à la force électrique. Le champ électrique $\overrightarrow{E}$ est le champ créé en P par le nuage électronique soit $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}(P) = \dfrac{-Zer}{4\pi\epsilon_0 a^3}\overrightarrow{e_r}$ avec $r\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{NP}$ soit $\overrightarrow{E}(P) = \dfrac{-Ze}{4\pi\epsilon_0 a^3}\overrightarrow{NP}$.



A l'équilibre du noyau on a $\overrightarrow{F_e} = Ze(\overrightarrow{E_0} + \overrightarrow{E}(P)) = \overrightarrow{0}$ soit $\overrightarrow{E_0} = -\overrightarrow{E}(P) = \dfrac{Ze}{4\pi\epsilon_0 a^3}\overrightarrow{NP}$ ou encore $\overrightarrow{NP} = \dfrac{4\pi\epsilon_0 a^3}{Ze}\overrightarrow{E_0}$.

Le moment dipolaire du dipole induit est $\overrightarrow{p} = Ze\overrightarrow{NP} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \overrightarrow{E_0}$. Par identification la polarisabilité électronique s'écrit $\alpha = 4\pi a^3$: elle est d'autant plus grande que l'atome est gros. Effectivement quand l'atome est de grande taille, le nuage électronique se déforme plus facilement.

3. On a $\overrightarrow{NP} = \dfrac{4\pi\epsilon_0 a^3}{Ze}\overrightarrow{E_0}$ donc en norme $NP = \dfrac{4\pi\epsilon_0 a^3}{ZeE_0}$.

Hélium: $Z = 1$ et l'ordre de grandeur de la taille de l'atome est $a \approx 10^{-10}\ m$ soit $NP = \dfrac{4\pi 8,8.10^{-12}(10^{-10})^3}{1,6.10^{-19}10^4} \approx 10^{-25}\ m$.