TD équations de Maxwell

I. **Courants de conduction et de déplacement**

On étudie un milieu de conductivité σ pour lequel la densité volumique de courant de conduction vérifie la loi d'ohm locale. Ce milieu est le siège d'un champ électrique de la forme $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}\cos(\omega t + \phi)$.

1. Qu'appelle-t-on courant de déplacement ? Exprimer, en ordre de grandeur, α défini comme le rapport des amplitudes du courant de conduction sur le courant de déplacement.

2. Calculer α pour des fréquences de 10 Hz à 10^{10} Hz pour le cuivre et le verre. En déduire une simplification de l'équation de Maxwell-Ampère. Données: $\sigma_{Cu} = 6.10^7\ SI$, $\sigma_{verre} = 10^{-6}\ SI$ et $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9\ SI$.

Réponse: $\alpha \approx \dfrac{\sigma}{\epsilon_0\omega}$

II. **Flux du vecteur de Poynting**

On considère un câble électrique assimilé à un cylindre d'axe Oz, de longueur L, de rayon a, conducteur ohmique de conductivité γ, parcouru par des courants indépendants du temps de densité volumique uniforme $\overrightarrow{j} = j\overrightarrow{e_z}$. Sa perméabilité est celle du vide μ_0.

1. Déduire des symétries, les directions des champs électrique et magnétique. Préciser la forme des lignes de champ électrique et magnétique.

2. Exprimer l'intensité I du courant dans le câble et la résistance R_c du câble.

3. Déduire de la loi d'Ohm, l'expression du champ $\overrightarrow{E}$. Déduire du théorème d'Ampère le champ magnétique créé en tout point à l'extérieur du câble.

4. En déduire les expressions du vecteur de Poynting en un point M à la surface du câble et de la puissance électromagnétique rayonnée par le champ électromagnétique à travers le câble en fonction de la résistance R_c du câble et de I. Commenter.

Réponses : 3- $\overrightarrow{E} = \dfrac{I}{\pi a^2\sigma}\overrightarrow{e_z}$ *4-* $\overrightarrow{R} = \dfrac{-I^2}{2\sigma\pi^2a^3}\overrightarrow{e_r}$ *et* $P = -R_cI^2$

III. **Décharge d'une boule conductrice dans l'air**

On constate expérimentalement qu'une boule conductrice de rayon R, uniformément chargée en surface et abandonnée dans l'air avec une charge Q_0 se décharge. Pour interpréter ce phénomène, on suppose que l'air est un milieu faiblement conducteur de conductivité γ (dans l'air la densité volumique de charges est nulle). L'origine de l'espace étant prise au centre O de la boule, on adopte les coordonnées sphériques de centre O.

1. Le théorème de Gauss est-il valable? Exprimer le champ électrique en M situé à l'extérieur de la boule conductrice à l'instant t où la charge de la boule est égale à $Q(t)$. En déduire $\overrightarrow{j}$, le vecteur densité de courant dans l'air.

2. Déduire des symétries que le champ magnétique est nul en tout point.

3. Déduire de l'équation de Maxwell-Ampère, l'équation différentielle vérifiée par $Q(t)$. La résoudre.

4. Calculer l'énergie électrique présente dans tout l'espace à l'extérieur de la boule à l'instant t. En déduire l'énergie perdue entre $t = 0$ et $t \to \infty$.

5. Exprimer la puissance que le champ électrique cède aux charges pour les mettre en mouvement dans tout l'espace à l'extérieur de la boule. Poser le calcul permettant d'exprimer E_{Joule}, l'énergie cédée par le champ électrique aux charges à l'extérieur de la boule. Le calcul conduit à $\dfrac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0 R}$. Commenter le résultat.

Réponses : $\overrightarrow{j} = \dfrac{\gamma Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$, $Q(t) = Q_0e^{-t/\tau}$ *et l'énergie perdue est* $\dfrac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0 R}$.

IV. **Equations de propagation des champ $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ dans le vide**

On donne $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\overrightarrow{f}) - \Delta\overrightarrow{f}$ $(*)$

1. Ecrire les équations de Maxwell dans le vide (en absence de charges et de courants).

2. Déduire de la relation $(*)$ appliquée à $\overrightarrow{E}$ l'équation de propagation du champ électrique:

$\Delta\overrightarrow{E} - \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$. Commenter.

3. Déduire de la relation $(*)$ appliquée à $\overrightarrow{B}$ l'équation de propagation du champ magnétique. Commenter.

V. **Effet Meissner**

Un matériau supraconducteur est caractérisé par la relation locale $\overrightarrow{j} = -\dfrac{\overrightarrow{A}}{\mu_0\delta^2}$ appelée équation de London où δ est une constante positive et $\overrightarrow{A}$ un vecteur défini par $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A}$.

L'étude est conduite en régime statique.

Le matériau supraconducteur occupe l'espace compris entre les plans $z = -a$ et $z = +a$ avec $\delta << a$. A l'extérieur du matériau règne un champ magnétique uniforme et constant $\overrightarrow{B} = B_0\overrightarrow{e_x}$.

On admet que le champ magnétique est continu.

1. On donne $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\overrightarrow{B}) - \Delta\overrightarrow{B}$. Rappeler et utiliser les équations de Maxwell Thomson et de Maxwell Ampère pour montrer que dans le supraconducteur, le champ magnétique vérifie: $\Delta\overrightarrow{B} = \dfrac{\overrightarrow{B}}{\delta^2}$ $(*)$.

2. Déterminer les variables dont dépend le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ dans le supraconducteur. On admet que ce champ magnétique est selon Ox. Déduire de l'équation $(*)$ l'équation différentielle vérifiée par B et la résoudre.

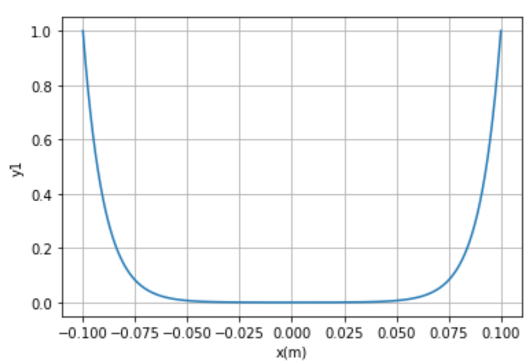
3. Déduire de l'équation de Maxwell-Ampère, l'expression de $\overrightarrow{j}$.

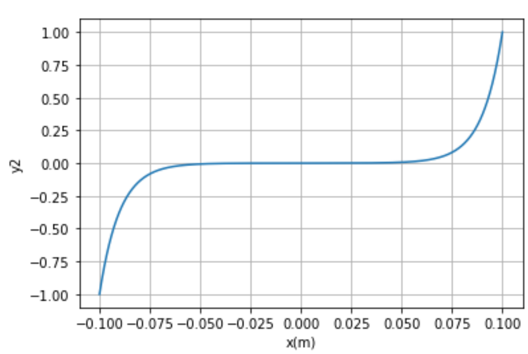
4. On donne le code python et le résultat de son exécution:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a=0.1
d=0.1*a
z=np.linspace(-a,a,1000)
y1=np.cosh(z/d)/np.cosh(a/d)
y2=np.sinh(z/d)/np.cosh(a/d)
plt.plot(z,y1)
plt.grid()
plt.xlabel('x(m)')
plt.ylabel('y1')
plt.show()

plt.plot(z,y2,label='y2')
plt.grid()
plt.xlabel('x(m)')
plt.ylabel('y2')
plt.show()
```



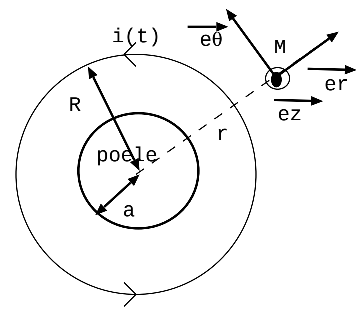


Utiliser ces courbes pour décrire le champ magnétique et les courants dans un supraconducteur.

Réponses: 2- $\overrightarrow{B} = B(z)\overrightarrow{e_x}$, $\dfrac{d^2B}{dz^2} - \dfrac{B}{\delta^2} = 0$ et $B(z) = B_0\dfrac{\cosh(z/\delta)}{\cosh(a/\delta)}$.

VI. **Poêle à induction**

On se contente de comprendre le principe du chauffage par induction avec un circuit simple composé d'une unique spire circulaire de centre O et de rayon R, parcourue par une intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$. On travaille dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$. On pose, dans le plan de cette spire, une poêle assimilée à un cylindre de rayon $a < R$ et d'épaisseur e, de perméabilité magnétique relative μ_r et de conductivité électrique γ.



Dans un souci de simplification, on suppose que le champ magnétique $\overrightarrow{B}(M,t)$ créé par la spire dans la poêle est uniforme. On donne : $B(M,t) = \dfrac{\mu_0 \mu_r i(t)}{2R}$.

1. Déterminer la direction de $\overrightarrow{B}(M,t)$ et de $\overrightarrow{E}(M,t)$ et préciser la forme des lignes de champ électrique et de champ magnétique.

2. Rappeler l'équation locale de Maxwell-Faraday, en déduire l'expression du champ électrique. On admet que $\overrightarrow{E}$ ne dépend que de r et de t.

On donne : $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{A} = (\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z})\overrightarrow{e_r} + (\dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r})\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{1}{r}(\dfrac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta})\overrightarrow{e_z}$

3. Ce champ électrique induit est responsable de courants de Foucault répartis dans tout le volume du conducteur. Exprimer la densité de courant volumique $\overrightarrow{j}(M,t)$ en tout point de la poêle et la puissance volumique moyenne p dissipée par effet Joule en fonction des données.

4. En intégrant cette puissance volumique moyenne sur le volume de la poêle, montrer que la puissance moyenne totale induite s'écrit : $P_{ind} = \dfrac{\mu_0^2 \mu_r^2 \gamma \omega^2 I_0^2 e a^4 \pi}{64 R^2}$.

5. On dispose de poêles en aluminium et en fonte. Bien que l'aluminium soit environ 40 fois plus conducteur électriquement que la fonte, on choisira la poêle en fonte : pourquoi ? On donne $\mu_r = 80$ pour la fonte et $\mu_r = 1$ pour l'aluminium.

Réponses: 2- $E(r,t) = \dfrac{\mu_0 \mu_r I_0 \omega r}{4R} \sin(\omega t)$ *3-* $p = \dfrac{\gamma \mu_0^2 \mu_r^2 I_0^2 \omega^2 r^2}{32 R^2}$