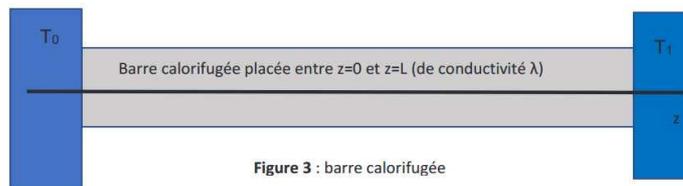


## I. Problème II : Transport d'eau chaude pour le chauffage

Pour assurer la quasi-totalité du chauffage urbain l'Islande utilise l'eau chaude contenue dans les cavités imperméables souterraines. Après pompage il y a transport de ces eaux chaudes jusqu'aux zones habitées par pipelines (aqueducs). On se place en régime stationnaire.

1. Rappeler la loi de Fourier en donnant les noms des grandeurs y figurant. Donner le sens physique de cette loi.

On considère un conducteur de conductivité thermique  $\lambda$  qui occupe le volume d'un cylindre d'axe  $Oz$ , de section  $S$  et de longueur  $l$  grande ( $l \gg \sqrt{S}$ ). Dans ce volume (figure 3) calorifugé sur les parois latérales, la température ne dépend que de la variable  $z$  en coordonnées cartésiennes. Ce milieu est sans pertes ni sources. On impose à l'aide de thermostats, la température  $T(z=0) = T_0$  et la température  $T(z=l) = T_1$ .



2. On note  $\phi(z)$  la puissance thermique qui traverse la surface  $S$  placée en  $z$ . Montrer que  $\phi$  est indépendante de  $z$ .

3. Exprimer le flux  $\phi$  qui traverse la section  $S$  dans le sens des  $z$  croissants et la loi de température  $T(z)$  en fonction des données  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $S$ ,  $l$  et  $\lambda$ .

4. Définir la résistance thermique de la barre et l'exprimer en fonction des caractéristiques de celle-ci. Commenter l'expression obtenue.

### Profil de température dans l'épaisseur du pipe-line

En réalité le transport d'eau chaude se fait par des aqueducs (figure 4) qui sont de longs tuyaux cylindriques creux d'axes horizontaux selon la direction de vecteur unitaire  $\vec{e}_z$ . L'eau de température notée  $T_{eau}$  se déplace à l'intérieur du cylindre de rayon  $R_{min}$ . L'air de température notée  $T_{air}$  se trouve à l'extérieur du cylindre de rayon  $R_{max}$ .

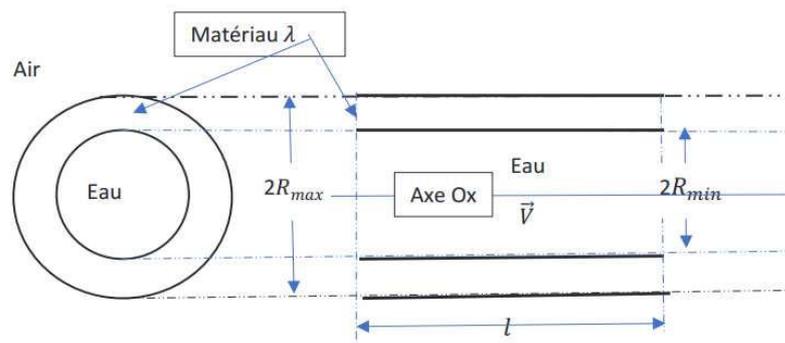


Figure 4 vue de dessus et vue de profil du tuyau

Les tuyaux sont réalisés dans un matériau de conductivité thermique  $\lambda$  et occupent l'espace  $R_{min} < r < R_{max}$  en coordonnées cylindriques. On fait par la suite l'hypothèse d'un flux radial à l'intérieur du tuyau ce qui signifie que la température ne dépend que de  $r$  soit  $T = T(r)$  et la densité volumique de courant thermique radial est  $\vec{j}_Q = j_Q(r)\vec{e}_r$ . On donne  $\vec{\text{grad}}V(r) = \frac{dV}{dr}\vec{e}_r$ .

5. On définit  $\phi(r)$ , la puissance thermique qui traverse le cylindre de rayon  $r$  et de longueur  $l$ . Exprimer  $\phi(r)$ .

6. Effectuer en régime stationnaire un bilan thermique entre les instants  $t$  et  $t + dt$  pour la portion de matériau conducteur comprise entre les cylindres de rayons  $r$  et  $r + dr$  (avec  $R_{min} < r < r + dr < R_{max}$ ). En déduire que la puissance thermique  $\phi$  à travers le conducteur s'écrit:

$$\phi = \frac{2\pi\lambda l}{\ln\left(\frac{R_{max}}{R_{min}}\right)}(T_{R_{max}} - T_{R_{min}})$$
 où  $T_{R_{min}}$  est la température de surface du tuyau en  $r = R_{min}$  et  $T_{R_{max}}$  est la température de surface du tuyau en  $r = R_{max}$ .

7. En déduire la résistance thermique  $R_{diff}$  associée à la diffusion pour une longueur  $l$  de tuyau. Faire l'application numérique pour un mètre de tuyau avec  $R_{max} = 40 \text{ cm}$ ,  $R_{min} = 30 \text{ cm}$ ,  $\lambda = 1 \text{ SI}$ .

L'eau chaude se déplace à la vitesse  $\vec{v} = v\vec{e}_x$  dans le tuyau. Donc il y a un phénomène de conducto-convection en  $r = R_{min}^-$ , à la surface du tuyau en contact avec l'eau de température  $T_{eau}$ , avec un coefficient de Newton  $h = 50 \text{ SI}$ . Il y a aussi un phénomène de conducto-convection en  $r = R_{max}^+$ , à la surface du tuyau en contact avec l'air de température  $T_{air}$ , avec un coefficient de Newton  $h' = 10 \text{ SI}$ .

Le phénomène de conducto-convection, entre un solide de température de surface  $T_s$  et un fluide de température  $T_f$  avec lequel il est en contact, obéit à la loi de Newton: la puissance thermique surfacique échangée est donnée par  $P = h(T_s - T_f)$  avec  $h$  le coefficient de Newton.

8. Tracer l'allure du profil de température  $T(r)$  entre  $r = 0$  et  $r = 2R_{max}$ .

9. Exprimer et calculer les deux résistances  $R_{cc,eau}$  et  $R_{cc,air}$  associées à la conducto-convection pour une longueur de tuyau de  $1 \text{ m}$ .

10. Donner le schéma électrique équivalent et exprimer la résistance équivalente ainsi que la conductance du tuyau de longueur  $l$ . Faire l'application numérique pour un tuyau de longueur  $l = 1 \text{ m}$ .

### Etude de la température de l'eau dans la conduite

On étudie ici l'aqueduc entre Svartsengi et Reykjavik. L'eau chaude est introduite dans les tuyaux au niveau de la station de pompage à Svartsengi avec un débit volumique  $D_v = 500 \text{ L}\cdot\text{s}^{-1}$  et à une température égale à  $T_0 = 363 \text{ K}$ . La température de l'air est notée  $T_{air}$ . On prendra pour la suite la conductance thermique du tuyau par unité de longueur égale à  $g_l = 11 \text{ W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ . On note  $\rho$  la masse volumique de l'eau et  $c$  sa capacité thermique massique. Données:  $\rho = 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  et  $c = 4,2 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

11. Calculer la vitesse  $v$  de l'eau à l'entrée du tuyau de l'aqueduc. On la suppose uniforme dans toute la section du tuyau.

12. On suppose par la suite que la température de l'eau ne dépend que de la variable  $x$ , on note  $T_{eau}(x)$ . On néglige les phénomènes de diffusion thermique en son sein. Appliquer le premier principe industriel à la portion d'eau contenue entre  $x$  et  $x + dx$  en négligeant la variation d'énergie potentielle de pesanteur et la variation d'énergie cinétique au cours de l'écoulement.

En déduire que  $T_{eau}(x)$  vérifie une équation différentielle de la forme  $\frac{dT_{eau}}{dx} + \frac{T_{eau}}{\delta} = \frac{T_{air}}{\delta}$ .

Exprimer  $\delta$  en fonction de  $g_l$ ,  $\rho$ ,  $D_v$  et  $c$ . Préciser l'unité de  $\delta$ .

13. En déduire la loi de température  $T_{eau}(x)$ .

La station de pompage qui alimente Reykjavik se trouve à  $50 \text{ km}$  de la station de pompage à Svarensngi. Calculer la température de l'eau quand elle arrive dans la capitale Reykjavik en été lorsque  $T_{air} = 285 \text{ K}$  et en hiver lorsque  $T_{air} = 273 \text{ K}$ . Commenter.

## II. Problème III: étude d'un four à micro ondes

De manière schématique, un four à micro-ondes est une cavité parallélépipédique rectangulaire constituée de six faces métalliques qui réfléchissent parfaitement les ondes électromagnétiques intérieures. Ces ondes sont produites et amenées dans la cavité par un dispositif qui ne sera pas étudié. Les six faces du four sont supposées parfaitement planes et cinq d'entre elles sont pleines. La dernière est la porte vitrée qui contient une grille métallique dont le rôle est de permettre d'observer l'intérieur du four tout en empêchant la fuite du rayonnement électromagnétique.

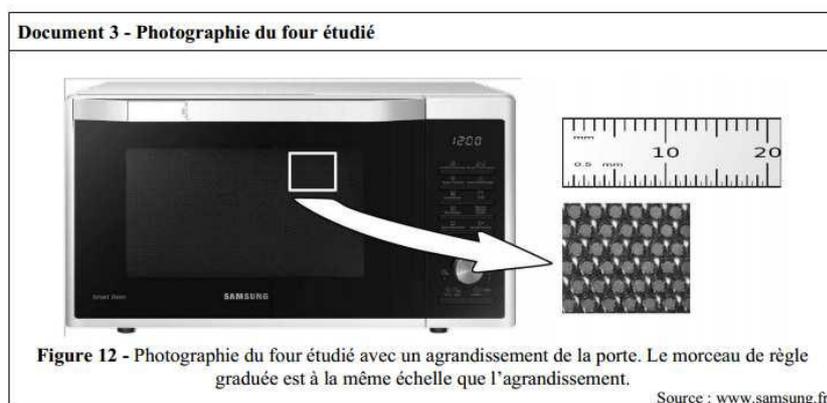
Le four est étudié sans aliments et l'air qu'il contient est assimilé au vide. Donnée:  $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$ .

Données: les dimensions du four sont  $d_x = 373 \text{ mm}$  (largeur),  $d_y = 370 \text{ mm}$  (profondeur) et  $d_z = 233 \text{ mm}$  (hauteur), la fréquence des ondes électromagnétiques est  $f = 2\,450 \text{ MHz}$ .

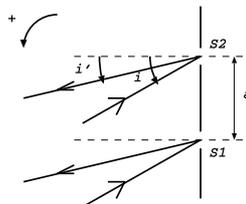
1. Calculer la longueur d'onde des ondes électromagnétiques.

### Etude de la porte

La porte du four est constituée de deux plaques de verre entre lesquelles est insérée une grille métallique percée d'ouvertures régulièrement espacées (visibles sur l'agrandissement dans le document 3).



La grille contenue dans la porte du four peut être vue comme un réseau bidimensionnel. Ce réseau doit réfléchir les ondes électromagnétiques comme s'il s'agissait d'une paroi métallique pleine. Afin de simplifier son étude, nous le modélisons par un réseau simplement périodique constitué de fentes fines équidistantes séparées de  $a$  et parallèles à l'axe  $Oz$ .



On suppose que le réseau est éclairé par des ondes planes, de longueur d'onde  $\lambda$  dans le vide, sous l'angle d'incidence orienté  $i$  et on s'intéresse aux ondes planes diffractées sous l'angle d'émergence orienté  $i'$ .

2. Montrer que, lorsque les interférences sont constructives, la différence de marche entre deux ondes électromagnétiques arrivant sur deux ouvertures consécutives du réseau vaut :  $\sin i'_p + \sin i = p \frac{\lambda}{a}$  où  $p$  désigne l'ordre d'interférences.

3. Estimer le pas du réseau à l'aide du document 3 et en déduire l'unique valeur de  $p$  possible. Dans cet ordre, donner la relation entre  $i$  et  $i'$  et commenter.

4. Rappeler les longueurs d'onde de la lumière visible. A l'aide d'une estimation numérique, expliquer pourquoi il est possible depuis l'extérieur de voir l'intérieur du four à micro-ondes à travers la grille.

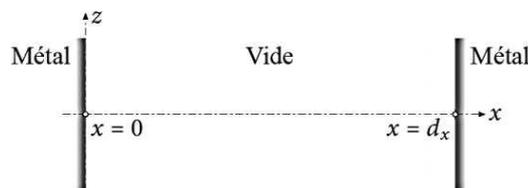
### Confinement des ondes électromagnétiques dans le four

On suppose ici que les six faces du four sont identiques et modélisées par des plans métalliques infiniment conducteurs. L'intérieur du four est assimilable au vide.

5. Ecrire et nommer les équations de Maxwell en absence de charges et de courants et établir l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique  $\vec{E}(M, t)$ .

On donne:  $\text{rot}(\text{rot}\vec{E}) = \text{grad}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$

Le problème étant identique dans les 3 directions de l'espace, son étude est temporairement réduite à une seule dimension. On choisit arbitrairement de travailler le long de l'axe des  $x$ .



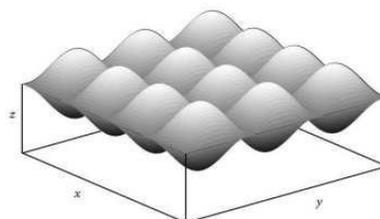
On souhaite déterminer l'expression du champ électromagnétique présent entre les deux plans conducteurs distants de  $d_x$ . En représentation cartésienne, on cherche le champ électrique de l'onde sous la forme:

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(kx + \phi) \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

6. Donner 4 qualificatifs permettant de caractériser cette onde. Justifier le choix de la nature de l'onde.
7. On suppose que le champ électrique est nul dans le métal et on admet que le champ électrique est continue à l'interface vide-métal, en  $x = 0$  et en  $x = d_x$ . En déduire les valeurs de  $\phi$  et de  $k$ . On choisira pour  $\phi$  la plus petite valeur positive possible et on exprimera  $k$  notamment en fonction d'un entier naturel  $n$ .
8. Représenter sur un même schéma l'allure du fondamental et des deux harmoniques suivants de l'onde dans la cavité. Citer, dans d'autres domaines de la physique, deux exemples avec lesquels une analogie pourrait être menée.

Le traitement tridimensionnel du problème permet de relier les longueurs d'ondes des modes de la cavité aux paramètres de la cavité à l'aide d'un triplet  $m, p$  et  $q$  d'entiers naturels tel que:  $\frac{1}{\lambda^2} = \frac{m^2}{d_x^2} + \frac{p^2}{d_y^2} + \frac{q^2}{d_z^2}$ .

9. On donne une représentation de l'amplitude de l'une des composantes du champ électrique correspondant est proposée sur la figure ci-contre, pour un mode propre particulier (c'est-à-dire un triplet  $m, p$  et  $q$  particulier). Ce mode est-il possible dans le four? (pour répondre, chercher les valeurs possibles de  $q$ ).



### Pénétration de l'onde dans le métal

En réalité, le champ électromagnétique n'est pas nul dans le métal. Une partie de l'onde électromagnétique pénètre dans les parois métalliques du four et s'atténue avec la distance. Celles-ci doivent donc être suffisamment épaisses pour que l'onde ne puisse les traverser que faiblement.

On s'intéresse à une onde électromagnétique dont le champ électrique s'écrit en notation complexe :

$$\vec{E}(M, t) = E_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \vec{e}_z$$

Les parois du four sont en céramique émaillée d'épaisseur  $e = 2 \text{ mm}$ , assimilable à de l'aluminium de conductivité électrique  $\gamma = 38,0.10^6 \text{ S.m}^{-1}$ . Donnée:  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ .

10. Justifier que l'on peut négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction.
11. Etablir l'équation de propagation du champ électrique. En déduire l'expression de  $\underline{k}^2$ .
12. Exprimer  $\underline{k}$  sous la forme  $\underline{k} = k' - ik''$  où  $k'$  et  $k''$  sont des réels positifs et en déduire l'expression réelle du champ électrique dans le métal.
13. On pose  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ . Que représente  $\delta$ ? Calculer  $\delta$  et conclure.