Sujet Concours blanc de physique

Durée 4h - Calculatrices autorisées

Le sujet comprend trois problèmes indépendants à traiter dans l'ordre de votre choix.

Il est demandé de numéroter les pages dans le format i/N où i est le numéro de la page et N le nombre de pages.Des points sont accordés à la présentation.

Tout résultat doit être justifié, notamment l'application d'une loi nécessite de préciser son nom et les hypothèses d'application.

Problème I : étude de la chute des gouttes de pluie

Dans les parties I et II (mécanique du point) et III (électrostatique), on s'intéresse d'abord à la vitesse limite de chute des gouttes de pluie et à la mesure de leurs diamètres,

Dans tout le sujet, on suppose les gouttes d'eau sphériques. L'ordre de grandeur de leur diamètre, noté *D*, est le millimètre.

Partie I - Vitesse des gouttes de pluie

On s'intéresse à la chute dans l'air d'une goutte d'eau de diamètre *D* et de masse volumique $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. On prendra pour l'air une masse volumique égale à $\rho_a = 1{,}3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. L'axe *Oz* est vertical descendant. L'accélération de la pesanteur vaut $\vec{g} = g\vec{e_z}$ avec $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Q1. Définir " référentiel galiléen ". Définir et exprimer le poids d'une goutte d'eau.

Q2. On admet que la seule autre force mise en jeu est la force de frottement, due à l'air, proportionnelle au carré de la vitesse *v* de la goutte. Elle s'écrit :

$$\overrightarrow{F_{frott}} = -C\pi\rho_a D^2 v^2 \vec{e_z} \text{ avec } C = 6{,}0 \cdot 10^{-2}.$$

Vérifier l'homogénéité de cette formule.

Q3. En appliquant la seconde loi de Newton à la goutte dans le référentiel terrestre, montrer que sa vitesse limite, donc indépendante du temps, s'écrit :

$$\overrightarrow{v_{\lim}} = K\sqrt{D}\,\vec{e_z}$$

où *K* est un coefficient à exprimer en fonction de ρ, ρ_a, *C* et de *g*.

Calculer la vitesse limite pour des diamètres égaux à 1 mm, 3 mm et 5 mm.

Gunn et Kinzer ont mesuré en 1949 avec précision des vitesses limites de gouttes de différents diamètres. Les résultats de leurs mesures avec les barres d'incertitudes sont reportés sur la **figure 1** en trait plein ainsi que la représentation de la relation obtenue en **Q3** en traits pointillés.

Q4. Définir et calculer le nombre de Reynolds pour les gouttes de diamètres égaux à 1 mm, 3 mm et 5 mm. Conclure sur la validité du modèle théorique élaboré aux questions de Q1 à Q3.
Pour quelle raison le modèle théorique n'est-il pas validé pour des gouttes de grande taille?

Donnée: viscosité de l'air : $\eta_a = 10^{-5}$ Pl

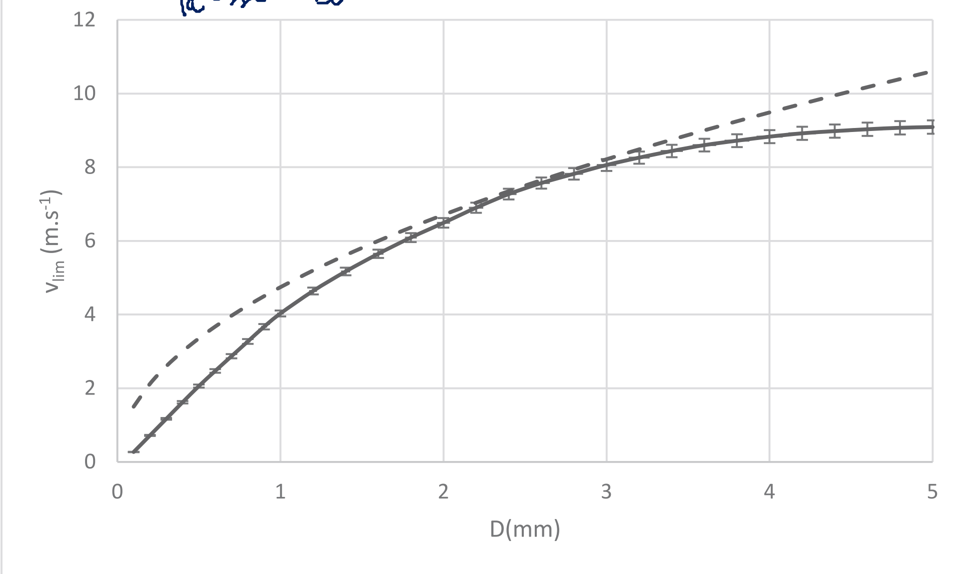

Figure 1 - Influence du diamètre sur la vitesse limite

Selon les précipitations, la taille des gouttes de pluie est très variable. La distribution des tailles de goutte, qui renseigne sur les événements météorologiques, doit souvent être mesurée. On utilise pour cela un disdromètre ("Distribution of Drops Meter").

Partie II - Disdromètre à impact avec platine

On suppose dans cette partie que la vitesse limite atteinte par une goutte de diamètre D qui tombe dans l'atmosphère est donnée par la relation :

$$\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = K\sqrt{D}\,\overrightarrow{e_z} \text{ avec } K = 150 \text{ m}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1} .$$

Il existe deux types de disdromètres : le plus ancien est le disdromètre à impact (**photo 1**).

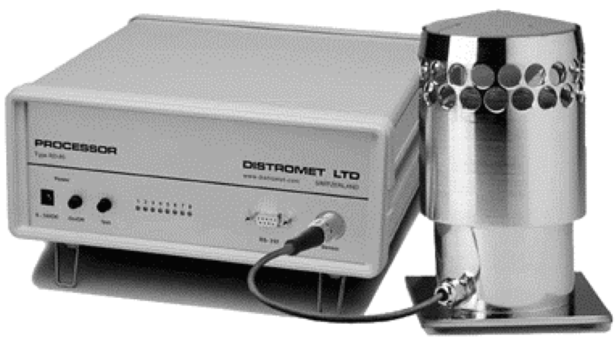

Photo 1 - Disdromètre Joss-Waltvogel

Il se compose d'une platine sensible recevant les gouttes de pluie de masse $m(D)$ ayant atteint leur vitesse limite et d'un système de traitement permettant la mesure de celle-ci.

On modélise la platine par un disque plan horizontal, de rayon R et de masse M, relié à un support fixe par l'intermédiaire d'une suspension, modélisée par un système masse-ressort amorti.

On note k la raideur du ressort liant la platine au support, l_0 sa longueur à vide et λ le coefficient de frottement traduisant l'amortissement du disque : la force de frottement, qui s'oppose à la vitesse de la platine, s'écrit donc $\vec{f} = -\lambda \vec{v}_{\text{platine}}$.

La goutte exerce, lors de son impact sur la platine, une force $\overrightarrow{F(t)} = F(t)\overrightarrow{e_z}$ verticale sur celle-ci.

Le référentiel lié au support est supposé galiléen.

Le déplacement de la platine du disdromètre par rapport à sa position d'équilibre est $Z(t)$ (**figure 2**).

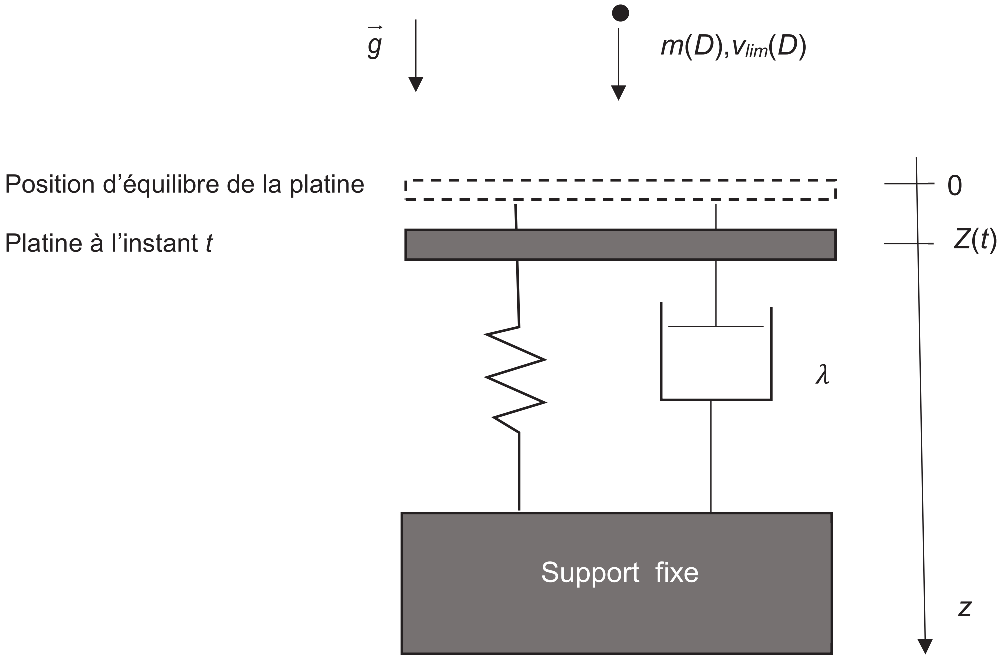

Figure 2 - Modélisation du disdromètre à impact à platine

Q5. Exprimer la longueur $l_{équ}$ du ressort à l'équilibre de la platine, sans impact de goutte.

Q6. Montrer que l'équation liant $Z(t)$ à $F(t)$ est :

$$\frac{d^2Z(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dZ(t)}{dt} + \beta Z(t) = \frac{F(t)}{M}$$

et exprimer les coefficients γ et β en fonction de k, M et de λ.

La force $F(t)$ est modélisée par :

- $F = F_0 = m(D)\dfrac{v_{\text{lim}}(D)}{\tau(D)}$ pour $0 < t < \tau$;
- $F = 0$ pour $t > \tau$.

Q7. Donner la signification physique de τ et justifier que son ordre de grandeur est :

$$\tau(D) \approx \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}.$$

On utilise en pratique un facteur correctif $\xi = 0{,}65$ tel que :

$$\tau(D) = \xi \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}.$$

Calculer τ pour $D = 2{,}5\,\text{mm}$.

Q8. On se place à $0 \le t \le \tau(D)$ et on souhaite que la réponse du disdromètre soit la plus rapide possible.

a) Quelle doit être la relation entre les coefficients β et γ ?

On se place dans ce cas.

b) Le système étant à l'équilibre avant la chute de la goutte, montrer que la réponse du disdromètre s'écrit alors pour $0 \le t \le \tau$:

$$Z(t) = \frac{F_0}{k}\left[1 - \left(1 + \gamma\frac{t}{2}\right)e^{-\gamma t/2}\right].$$

c) Comment choisir γ pour réaliser $Z(\tau) = \dfrac{F_0}{k}$? Montrer alors que $Z(\tau)$ est proportionnel à D^{α} et donner la valeur de α.

d) Tracer l'allure de $Z(t)$ pour $0 \le t \le 2\tau$.

e) Comment la mesure de $Z(t)$ permet-elle de connaître D ?

Partie III - Disdromètre à impact avec piezoélectrique

Ce disdromètre est un disdromètre à impact utilisant un capteur piézoélectrique (**photo 2**).

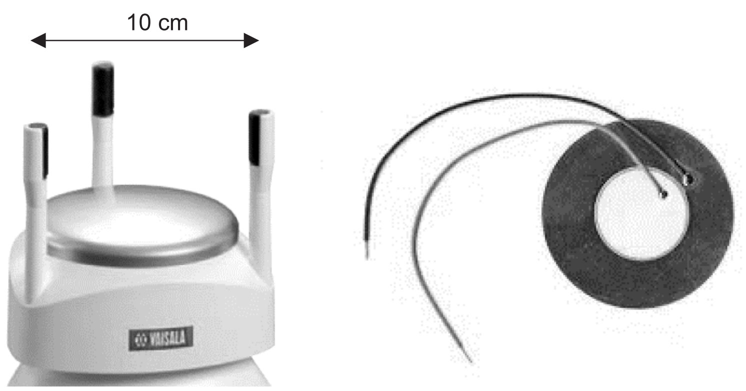

Photo 2 - (à gauche) Disdromètre Vaisala / (à droite) Capteur piézoélectrique

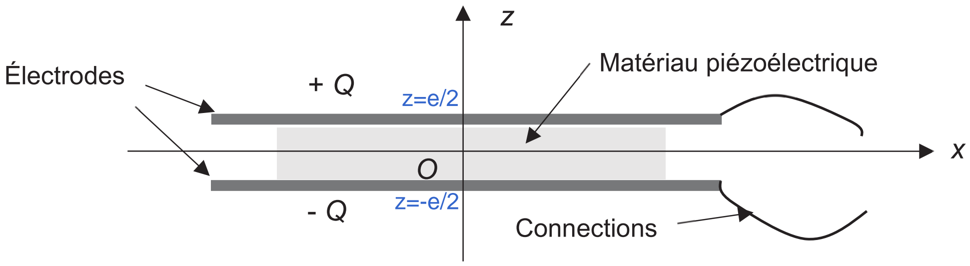

Figure 3 - Modélisation du capteur piézoélectrique

Les cristaux piézoélectriques, par exemple le quartz, génèrent une tension lorsqu'ils sont soumis à une contrainte mécanique et ils se déforment lorsqu'ils sont soumis à une tension électrique.

On modélise le capteur piézoélectrique par l'ensemble de deux électrodes planes de surface S chargées $+Q$ et $-Q$ et séparées par le matériau piézoélectrique, d'épaisseur e (**figure 3**).

On considère tout d'abord l'électrode chargée $+Q$: on la modélise par un plan infini d'épaisseur nulle, situé en $z = e/2$ et on cherche le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par cette distribution placée dans le vide.

Q9. En étudiant les symétries, puis les invariances de la distribution, donner la direction du champ électrique $\overrightarrow{E(M)}$ en un point M quelconque de l'espace et les coordonnées dont ce champ dépend. On pose z'=z-e/2 la position de M par rapport au plan d'équation z=e/2, comparer $\vec{E}$(z') et $\vec{E}$(-z').

Q10. En utilisant un théorème d'électromagnétisme à énoncer, calculer le champ électrique créé par cette distribution en tout point de l'espace.

Q11. En déduire l'expression du champ électrique $\overrightarrow{E(M)}_{\text{vide}}$ créé par l'association des deux électrodes chargées $+Q$ et $-Q$, en un point M entre les deux électrodes s'il y avait le vide. Dans un matériau ayant une permittivité ε, on remplace la permittivité diélectrique du vide par ε. En déduire le champ $\overrightarrow{E(M)}_{\text{piezo}}$ à l'intérieur du matériau piézoélectrique.

Q12. On admet que la charge Q est proportionnelle à la force $F(t)$ exercée par une goutte sur le capteur lors de son impact. Montrer, en utilisant la modélisation de $F(t)$ proposée en haut de la question Q7 que la tension $u(t)$ aux bornes du capteur piézoélectrique est proportionnelle à D^3.