TD équations de Maxwell

I. **Courants de conduction et de déplacement**

1. Le courant de déplacement est $\overrightarrow{j_D} = \epsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = -\epsilon_0 \omega \sin(\omega t + \phi)\overrightarrow{E_0}$.

On a $\alpha = \dfrac{j_c}{j_D} \approx \dfrac{\sigma E_0}{\epsilon_0 \omega E_0} \approx \dfrac{\sigma}{\epsilon_0 2\pi f}$.

2. AN: pour le cuivre: $\alpha = 1,1.10^{17}$ pour 10 Hz et $\alpha = 1,1.10^{8}$ pour 10^{10} Hz. Dans tous les cas on a $\alpha >> 1$, on peut donc négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction donc l'équation de Maxwell Ampère s'écrit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} = \mu_0 \sigma \overrightarrow{E}$.

AN: pour le verre: $\alpha = 1,8.10^{3} >> 1$ pour 10 Hz, on peut donc négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction donc l'équation de Maxwell Ampère s'écrit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} = \mu_0 \sigma \overrightarrow{E}$.

pour le verre: $\alpha = 1,8.10^{5} >> 1$ pour 10 Hz, on peut donc négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction donc l'équation de Maxwell Ampère s'écrit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} = \mu_0 \sigma \overrightarrow{E}$.

et $\alpha = 1,8.10^{-6} << 1$ pour 10^{10} Hz. on peut donc négliger le courant de conduction devant le courant de déplacement donc l'équation de Maxwell Ampère s'écrit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$.

Pour le verre, la simplification de l'équation de Maxwell Ampère dépend de la fréquence.

II. **Décharge d'une boule conductrice**

1. Le théorème de Gauss résulte de l'équation de Maxwell Gauss qui est la même en statique et en régime variable donc le théorème de Gauss peut aussi s'appliquer en régime variable.

Les plans $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ et $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\phi})$ sont P^+ donc le champ électrique en M appartient à ces plans soit $\overrightarrow{E}$ est selon $\overrightarrow{e_r}$.

Il y a invariance par rotation autour de O donc le champ électrique ne dépend que de r. On a $\overrightarrow{E} = E(r)\overrightarrow{e_r}$.
On choisit pour surface de gauss une sphère de centre O et de rayon r. On a $\phi = E(r,t)4\pi r^2$.

On se place dans le cas où $r > R$ soit $Q_{int} = Q(t)$ et d'après le théorème de Gauss: $\phi = E(r,t)4\pi r^2 = \dfrac{Q(t)}{\epsilon_0}$ soit $\overrightarrow{E} = \dfrac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$.

2. Les plans $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ et $(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\phi})$ sont P^+ donc le champ magnétique en M est perpendiculaire à ces deux plans soit $\overrightarrow{B}$ est nul.

3. L'équation de Maxwell Ampère s'écrit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} + \mu_0\epsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ qui donne $\overrightarrow{0} = \mu_0 \gamma \overrightarrow{E} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ soit à résoudre $\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} + \dfrac{\gamma}{\epsilon_0}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$. En remplaçant $\overrightarrow{E}$ par $\overrightarrow{E} = \dfrac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$ on trouve l'équation différentielle $\dfrac{dQ}{dt} + \dfrac{\gamma}{\epsilon_0} Q = 0$ de solution $Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \dfrac{\epsilon_0}{\gamma}$.

4. L'énergie électrique dans tout l'espace extérieur à la sphère est égale à $U_e = \displaystyle\iiint \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau$ avec $d\tau = dr r d\theta r \sin\theta d\phi$ en coordonnées sphériques (il sera donné dans un sujet d'écrit).

Soit $U_e = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{(4\pi)^2\epsilon_0}\displaystyle\int_R^\infty \frac{dr}{r^2}\int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{(4\pi)^2\epsilon_0}\frac{1}{R}[-\cos\theta]_0^\pi 2\pi = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$.

L'énergie électrique présente à $t = 0$ est donc $U_e(t=0) = \dfrac{Q(t=0)^2}{8\pi\epsilon_0 R} = \dfrac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0 R}$.

L'énergie électrique présente à $t = \infty$ est donc $U_e(t=\infty) = \dfrac{Q(t=\infty)^2}{8\pi\epsilon_0 R} = 0$.

L'énergie électrique perdue est donc $U_e(t=0) - U_e(t=\infty) = \dfrac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0 R}$.

5. La puissance cédée par le champ électrique aux charges pour les mettre en mouvement est $P =$

$\iint \overrightarrow{j}.\overrightarrow{E}d\tau = \iiint \gamma \overrightarrow{E}^2 d\tau.$

On en déduit l'énergie par une intégrale soit $E_{Joule} = \displaystyle\int_0^\infty P dt = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0 R}$.

Ainsi toute l'énergie électrique présente initialement à l'extérieur de la boule a été perdue par effet Joule sous forme de chaleur.

III. **Effet Meissner**

1. On donne $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\overrightarrow{B}) - \Delta\overrightarrow{B}$.

Maxwell Thomson: $\text{div}\overrightarrow{B} = 0$

Maxwell Ampère: $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{j} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} = \mu_0\overrightarrow{j}$ en statique

On applique $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\overrightarrow{B}) - \Delta\overrightarrow{B}$

qui donne $\overrightarrow{\text{rot}}(\mu_0\overrightarrow{j}) == -\Delta\overrightarrow{B}$ avec $\mu_0\overrightarrow{j} = -\dfrac{\overrightarrow{A}}{\delta^2}$

soit $\overrightarrow{\text{rot}}(-\dfrac{\overrightarrow{A}}{\delta^2}) = -\dfrac{1}{\delta^2}\overrightarrow{B} = -\Delta\overrightarrow{B}$

d'où $\Delta\overrightarrow{B} = \dfrac{\overrightarrow{B}}{\delta^2}$ $(*)$.

2. Il y a invariance par translation selon Ox et Oy donc B ne dépend que de z. On admet que ce champ magnétique est selon Ox donc $\overrightarrow{B} = B(z)\overrightarrow{e_x}$ et $\Delta\overrightarrow{B} = \dfrac{d^2B}{dz^2}\overrightarrow{e_z}$

L'équation $(*)$ donne: $\dfrac{d^2B}{dz^2} - \dfrac{B}{\delta^2} = 0$

On écrit l'équation caractéristique: $r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0$ soit $r = \pm\dfrac{1}{\delta}$ et donc $B(z) = Ce^{z/\delta} + De^{-z/\delta}$.

On trouve C et D avec le continuité du champ magnétique en $z = \pm a$ soit:

$B(z = a) = Ce^{a/\delta} + De^{-a/\delta} = B_0$

$B(z = -a) = Ce^{-a/\delta} + De^{a/\delta} = B_0$

La fonction $B(z)$ est paire soit $C = D = \dfrac{B_0}{e^{a/\delta} + e^{-a/\delta}} = \dfrac{B_0}{2\cosh(a/\delta)}$ et donc $B(z) = \dfrac{B_0}{2\cosh(a/\delta)}(e^{z/\delta} + e^{-z/\delta}) = B_0\dfrac{\cosh(z/\delta)}{\cosh(a/\delta)}$.

3. L'équation de Maxwell-Ampère est $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{j}$ avec $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B} = \nabla\Lambda B(z)\overrightarrow{e_x} = \dfrac{d}{dz}\overrightarrow{e_z}\Lambda B(z)\overrightarrow{e_x} = \dfrac{dB}{dz}\overrightarrow{e_y} = \dfrac{B_0}{\delta}\dfrac{\sinh(z/\delta)}{\cosh(a/\delta)}\overrightarrow{e_y}$.

On a donc $\overrightarrow{j} = \dfrac{B_0}{\mu_0\delta}\dfrac{\sinh(z/\delta)}{\cosh(a/\delta)}\overrightarrow{e_y}$.

4. Sur le code python on voit que la fonction B est proportionnel à $y1$ et j est proportionnel à $y2$. On voit que B et j sont nuls presque dans tout le supraconducteur.

Utiliser ces courbes pour décrire le champ magnétique et les courants dans un supraconducteur. Les courants et le champ magnétique sont dits surfaciques.

IV. **Poële à induction**

1. M appartient au plan $P^+(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ et au plan $P^-(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z})$.

Le champ magnétique en M est perpendiculaire au plan P^+ donc il est selon Oz, les lignes de champ magnétique sont des droites parallèles à Oz.

Le champ électrique en M est perpendiculaire au plan P^- donc il est selon $\overrightarrow{e_\theta}$, les lignes de champ électrique sont des cercles centrés sur Oz.

2. On utilise l'équation de Maxwell Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = \frac{\mu_0\mu_r}{2R}\omega I_0 \sin(\omega t)\overrightarrow{e_z}$.

Ici $E_r = E_z = 0$ et $E_\theta = E(r,t)$, donc on a $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r}\overrightarrow{e_z}$.

Ainsi l'équation de Maxwell conduit à $\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} = \frac{\mu_0\mu_r}{2R}I_0\omega\sin(\omega t)$ soit $\frac{d(rE_\theta)}{dr} = r\frac{\mu_0\mu_r I_0}{2R}\omega\sin(\omega t)$. On intègre par rapport à r : $rE_\theta = \frac{\mu_0\mu_r I_0 r^2\omega}{4R}\sin(\omega t) + A$ donc $E_\theta = \frac{\mu_0\mu_r I_0 r\omega}{4R}\sin(\omega t) + \frac{A}{r}$ (ici $A = 0$ car le champ électrique doit être défini en $r = 0$).

On a donc $\overrightarrow{E} =$
$frac\mu_0\mu_r I_0 r\omega 4R\sin(\omega t)\overrightarrow{e_\theta}$.

3. On en déduit $\overrightarrow{j}$ de la loi d'Ohm locale: $\overrightarrow{j} = \gamma\overrightarrow{E} = \frac{\gamma r\mu_0\mu_r I_0\omega}{4R}\sin(\omega t)\overrightarrow{e_\theta}$.

4. La puissance volumique liée à l'effet joule est la puissance cédée aux charges par le champ électrique c'est $\frac{dP}{d\tau} = p = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{E} = \gamma E^2 = \gamma(\frac{r\mu_0\mu_r I_0\omega}{4R}\sin(\omega t))^2$ et donc en valeur moyenne par rapport au temps $< p >= \frac{\gamma}{2}(\frac{r\mu_0\mu_r I_0\omega}{4R})^2$.

5. En coordonnées cylindriques, l'élément de volume $d\tau$ s'écrit $dr.rd\theta.dz$ soit la puissance totale :
$P = \iiint \frac{\gamma}{2}(\frac{r\mu_0\mu_r I_0\omega}{4R}rdrd\theta dz$.