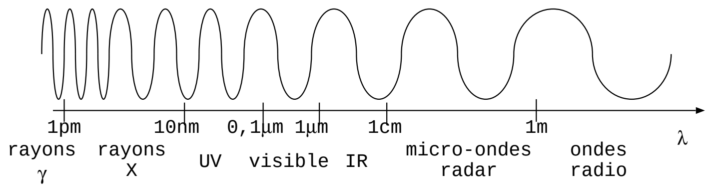
Chapitre EM 9 : Ondes em dans le vide

Soit en un point de l'espace des charges et/ou des courants fonctions du temps. Ils créent en leur voisinage un champ électromagnétique variable. Ce champ électromagnétique variable est source d'un champ électromagnétique en son voisinage... et ainsi de proche en proche, le champ électromagnétique se propage. Il s'agit donc d'un phénomène ondulatoire.

Spectre des ondes électromagnétiques



I. Equations de propagation des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

1. Rappel

L'équation de propagation est l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la grandeur perturbation de l'onde.

Pour les ondes mécaniques, on obtient l'équation de propagation

Pour les ondes sur un câble électrique, on obtient l'équation de propagation

Pour les ondes électromagnétiques, on obtient l'équation de propagation

2. Equations de propagation de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le vide

Les équations de Maxwell dans le vide (en dehors des courants et des charges qui ont donné naissance à l'onde) s'écrivent:

Equation de propagation de $\vec{E}$

Equation de propagation de $\vec{B}$

3. Au sujet de l'opérateur Laplacien

En coordonnées cartésiennes,

Exemple: exprimer $\Delta\overrightarrow{E}$ pour $\overrightarrow{E_1} = \overrightarrow{E_0}\sin(\omega t + kz)$ et $\overrightarrow{E_2} = \overrightarrow{E_0}\cos(\alpha x)\cos(\omega t - ky)$

En coordonnées sphériques, l'opérateur Laplacien est donné dans l'énoncé.

Exemple: cas particulier où $E = E(r,t)$ vérifie l'équation de d'Alembert $\Delta E - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$.

On donne le laplacien scalaire: $\Delta E = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2(rE)}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\dfrac{\partial E}{\partial\theta}) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 E}{\partial\phi^2}$

II. Solutions en OPPH

Le programme limite l'étude des solutions aux ondes progressives planes harmoniques dites $OPPH$.

1. Rappels

Définition d'une onde plane:

Exemples: $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}\cos(\omega t + kx)$ et $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}\sin(\alpha y)\cos(\omega t - kz)$

Modèle de l'onde plane:

2. Ecriture des solutions en notation réelle

On propose une solution de la forme $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0} \cos(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM} + \phi)$

$\omega =$

$\overrightarrow{k} =$

Exemple pour $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{e_x}$, le champ électrique est de la forme:

Exemple pour $\overrightarrow{k} = -k\overrightarrow{e_y}$, le champ électrique est de la forme:

Exemple pour $\overrightarrow{k} = k\cos\alpha\overrightarrow{e_x} - k\sin\alpha\overrightarrow{e_z}$, le champ électrique est de la forme:

A retenir: les deux écritures possibles:

3. Utilisation de la notation complexe

On propose une solution de la forme $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0} \cos(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM})$

Pour simplifier les calculs, on utilise la notation complexe: $\underline{\overrightarrow{E}} =$

Passage de la notation complexe à la notation réelle:

L'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial t}$ s'écrit

$\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ s'écrit

L'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$ s'écrit

L'opérateur Δ s'écrit

(on pense "c'est la dérivée par rapport à $\overrightarrow{OM}$")

(on pense "c'est la dérivée seconde par rapport à $\overrightarrow{OM}$")

Remarque: l'énoncé peut proposer aussi la notation complexe $\underline{\overrightarrow{E}} =$

L'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial t}$ s'écrit

$\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ s'écrit

L'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$ s'écrit

L'opérateur Δ s'écrit

(on pense "c'est la dérivée par rapport à $\overrightarrow{OM}$")

(on pense "c'est la dérivée seconde par rapport à $\overrightarrow{OM}$")

Les résultats physiques (relation de dispersion et relations de structure) sont les mêmes avec les deux notations.

4. Relation de dispersion

C'est la relation entre k et ω, on l'obtient en injectant la solution proposée pour $\overrightarrow{E}$ (ou $\overrightarrow{B}$) dans l'équation de propagation.

Soit une onde de la forme $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}\cos(\omega t - kx)$.

En notation réelle:

En notation complexe:

On en déduit la vitesse de phase:

5. Structure des OPPH

On utilise ici la notation complexe $\underline{\overrightarrow{E}} = \overrightarrow{E_0} e^{j(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM})}$.

$div\underline{\overrightarrow{E}} =$

$div\underline{\overrightarrow{B}} =$

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\underline{\overrightarrow{E}} =$

$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\underline{B}} =$

Conclusion :

Dans les exemples suivants donner la direction de polarisation du champ électrique (c'est la direction de $\overrightarrow{E}$), la direction de propagation, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{B}$.

$\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{e_z}\cos(\omega t - ky)$

$\overrightarrow{\underline{E}} = -E_0\overrightarrow{e_y}e^{j(\omega t+kx)}$

III. **Etude énergétique**

Les grandeurs énergétiques associées à une OPPH sont:

-la *densité volumique d'énergie em*: $u_{em} =$

- le *vecteur de Poynting:* $\overrightarrow{R} =$

1. Etude en notation réelle

On étudie une onde de la forme $\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{e_y}\cos(\omega t - kx)$.

Expression du champ magnétique:

Expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique:

Expression du vecteur de Poynting:

2. Attention à la notation complexe

On ne peut pas utiliser la notation complexe pour déterminer les valeurs instantanées de $\overrightarrow{R}$ et de u_{em}.

La notation complexe ne s'utilise que pour calculer des valeurs moyennes dans le temps en utilisant des expressions données dans un sujet:

$< fg >= \frac{1}{2}\mathcal{R}e(\underline{f}.\underline{g}^*)$ où $\underline{g}^*$ désigne le complexe conjugué de $\underline{g}$.

Cette expression donne:

$< u_{em} >=$

$< \overrightarrow{R} >=$

Exemple : soit l'onde de champ électrique $\underline{\overrightarrow{E}} = E_0\overrightarrow{e_x}e^{j(\omega t+kz)}$. Exprimer le champ magnétique $\underline{\overrightarrow{B}}$ associé, la valeur moyenne du vecteur de Poynting et la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie électromagnétique. Exprimer le champ électromagnétique en notation réelle et en déduire le vecteur de Poynting instantané.

.

IV. Quand les ondes ne sont pas des OPPH

1. Généralisation aux ondes non harmoniques : les OPPH n'ont pas de réalité physique:

- les sources qui émettent de façon isotrope dans toutes les directions de l'espace émettent des ondes sphériques, le laser émet une onde gaussienne. Cela remet en cause l'hypothèse onde

- les sources émettent dans un certain domaine de longueur d'onde $\Delta\lambda = c\tau$ où τ est la durée d'émission d'un train d'onde. Cela remet en cause l'hypothèse onde

Les OPPH présentent tout de même un intérêt, en effet une onde non harmonique de direction de propagation $\overrightarrow{u}$ peut se décomposer en somme d'ondes planes harmoniques de pulsation ω différentes et de longueurs d'onde λ différentes : cela résulte du **théorème de superposition que l'on peut appliquer grâce à la linéarité des équations de Maxwell**.

2. Des exemples d'onde qui ne sont pas des OPPH

Exemple 1: soit une onde dont le champ électrique est donné par : $\overrightarrow{E} = E_0 \cos(\omega t) \sin(ky) \overrightarrow{e_x}$
Nature de l'onde:

Le champ magnétique associé s'écrit:

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est:

Exemple 2: soit une onde dont le champ électrique est donné par : $\overrightarrow{E} = E_0 \sin(\beta z) \cos(\omega t - kx) \overrightarrow{e_y}$
Nature de l'onde:

Le champ magnétique associé se déduit de: