TD ondes électromagnétiques dans le vide

I. **Expressions du champ em de l'onde**

1. Le champ électrique d'une onde qui se propage dans le vide en absence de charges et de courants, s'écrit: $\overrightarrow{E} = E_0\cos(\omega t + kz)\overrightarrow{e_x}$. Vérifier que c'est compatible avec l'équation de Maxwell Gauss. Exprimer le champ magnétique et le vecteur de Poynting associé ainsi que sa valeur moyenne par rapport au temps. Commenter.

2. On donne le champ électrique d'une onde $\overrightarrow{E} = E_0\cos(\omega t)\cos(kx)\overrightarrow{e_z}$. Montrer que cette onde peut être vue comme la superposition de deux OPPH et en déduire le champ magnétique de cette onde. Retrouver le résultat à l'aide d'une équation de Maxwell bien choisie. On donne: $2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$ et $\cos p - \cos q = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting.

3. Le champ magnétique s'écrit $\overrightarrow{B} = B_0\cos(\frac{\pi x}{a})\sin(\omega t)\overrightarrow{e_y}$. Déduire de l'application d'une équation de Maxwell bien choisie, l'expression du champ électrique associé.

Réponses: 1- $\overrightarrow{B} = -\frac{E_0}{c}\cos(\omega t + kz)\overrightarrow{e_y}$ *et* $\overrightarrow{R} = -\frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\cos^2(\omega t + kz)\overrightarrow{e_z}$ *2-* $\overrightarrow{B} = -\frac{E_0}{c}\sin(\omega t)\sin(2kx)\overrightarrow{e_y}$. *3-* $\overrightarrow{E} = \frac{\pi B_0 c^2}{a\omega}\sin(\frac{\pi x}{a})\cos(\omega t)\overrightarrow{e_z}$ *et* $<\overrightarrow{R}> = \overrightarrow{0}$

II. **Onde émise par un laser**

Un laser émet un faisceau cylindrique de diamètre $d = 1,0\ cm$ de puissance $P = 10\ W$. On donne $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12}\ F.m^{-1}$.

1. Calculer la valeur numérique de la valeur moyenne du vecteur de Poynting.

2. On suppose que l'onde émise peut s'écrire sous la forme d'une OPPH se propageant selon Oz, polarisée selon Oy et d'amplitude E_0. Proposer une expression pour le champ électrique, en déduire le champ magnétique puis la valeur moyenne du vecteur de Poynting en fonction de E_0, ϵ_0 et c.

3. En déduire les amplitudes des champs électrique et magnétique émis par le laser.

Réponses: 1- $<||\overrightarrow{R}||> = 1,27.10^5\ W/m^{-2}$ 2- $<\overrightarrow{R}> = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}\overrightarrow{e_z}$ 3- $E_0 = 9,8\ kV.m^{-1}$, $B_0 = 33\ \mu T$

III. **Onde sphérique**

On considère un émetteur isotrope d'ondes électromagnétiques que l'on assimile à une source ponctuelle: il peut s'agir d'un émetteur de radio, d'un satellite, d'une étoile qui rayonne,... L'onde émise est sphérique. En coordonnées sphériques, elle est de la forme $\overrightarrow{E}(M,t) = E_0(r)\cos(\omega t - kr)\overrightarrow{e_\theta}$. Le milieu de propagation est assimilé au vide.

1. Par analogie avec une onde plane, identifier le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ de l'onde sphérique et donner la relation de dispersion.

2. On admet qu'une telle onde vérifie localement la même relation de structure qu'une onde plane. En déduire l'expression du champ magnétique associé.

3. Exprimer le vecteur de Poynting et sa moyenne temporelle.

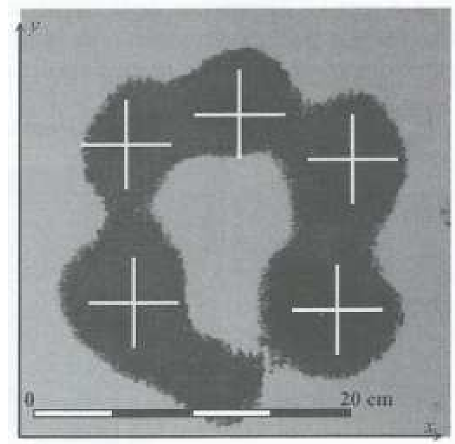
4. Exprimer la puissance moyenne P rayonnée à travers une sphère de rayon r. Justifier par un argument physique que cette puissance est indépendante de r. En déduire que $E_0(r) = \frac{A}{r}$ avec A une constante à déterminer.

Réponse: 4- $A = \sqrt{\frac{P\mu_0 c}{2\pi}}$

IV. **Four micro-ondes**

Un four à micro-ondes est une cavité parallélépipédique dans laquelle règne un champ électromagnétique créé par un magnétron. La distribution de ce champ dans la cavité est inhomogène, cet exercice se propose de réaliser une cartographie sommaire du champ en 2D au niveau du plateau. Le détecteur de champ est constitué de fins copeaux de chocolat uniformément répartis sur la plaque inférieure, le plateau tournant ayant été ôté. On cherche le champ sous la forme:

$\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{e_z}\sin(\frac{n\pi x}{a})\sin(\frac{m\pi y}{b})\cos(\omega t)$ où a et b sont respectivement la largeur et la profondeur de la plaque inférieure $a = b = 30\ cm$.



1. Commenter la forme de ce champ. Le champ électrique est nul sur les bords de la plaque. Que peut-on en déduire sur les nombres n et m?

2. Etablir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ $\overrightarrow{E}$ dans la cavité ? En déduire la relation que doivent satisfaire ω, n et m.

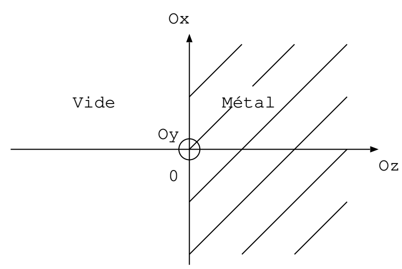
3. Déduire du cliché donnant les zones où le chocolat a fondu, la valeur numérique de la fréquence du magnétron.

Réponses: 2- $\frac{\omega^2}{c^2} = (\frac{n\pi}{a})^2 + (\frac{m\pi}{b})^2$ *3-* $f = 1,8\ GHz$

.

V. **Réflexion sur un métal parfait**

Une onde électromagnétique plane progressive monochromatique incidente se propage suivant l'axe Oz dans le vide. Un métal parfait est placé dans la partie de l'espace $z > 0$. La présence du métal génère une onde réfléchie mais pas d'onde transmise car le champ électromagnétique dans le métal parfait est nul.



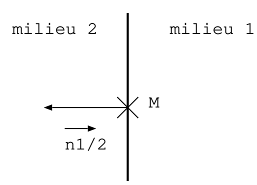
1. On donne le champ électrique de l'onde résultante dans le vide $\overrightarrow{E} = (E_0\cos(\omega t - kz) + E_0'\cos(\omega t + kz))\overrightarrow{e_x}$. Commenter cette expression et en déduire le champ magnétique résultant dans le vide.

2. On admet que le champ électrique est continue à la surface du dioptre vide-métal. En déduire la relation entre E_0' et E_0. On note $r = \frac{E_0'}{E_0}$. Donner la valeur numérique de r et préciser le nom de cette grandeur.

3. En déduire les expressions des champs électriques et magnétiques dans le vide en fonction de E_0, k, ω, t et z. De quel type d'onde s'agit-il? Vérifier que le champ magnétique n'est pas continu à la surface du dioptre vide-métal parfait.

On donne: $\cos p + \cos q = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$ et $\cos p - \cos q = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$.

4. On donne les conditions de passage du champ magnétique sur un dioptre qui sépare les milieux 1 et 2: $\overrightarrow{B_2}(M) - \overrightarrow{B_1}(M) = \mu_0\overrightarrow{j_s}\Lambda\overrightarrow{n_{1/2}}$ où M est un point du dioptre et $\overrightarrow{n_{1/2}}$ est le vecteur unitaire normal au dioptre dirigé de 1 vers 2. Déterminer l'expression des courants surfaciques $\overrightarrow{j_s}$.



Réponses: 2- $E_0' = -E_0$ *3-* $\overrightarrow{E} = 2E_0\sin(\omega t)\sin(kz)\overrightarrow{e_x}$ *et* $\overrightarrow{B} = \frac{2E_0}{c}\cos(\omega t)\cos(kz)\overrightarrow{e_y}$ *4-* $\overrightarrow{j_s} = \frac{2E_0}{\mu_0 c}\cos(\omega t)\overrightarrow{e_x}$.

VI. **Onde électromagnétique dans le vide**

On considère une onde électromagnétique se propageant dans le vide caractérisée par son champ électrique: $\vec{E} = E_0 \cos(\beta y) \cos(\omega t - \alpha x) \vec{e_z}$.

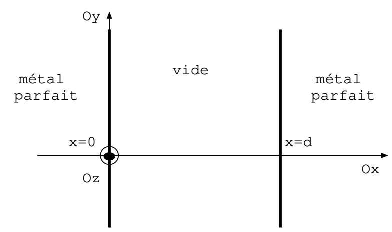
1. Démontrer l'équation de propagation du champ électrique et en déduire la relation de dispersion liant les paramètres α, β, ω et c.

2. Montrer que cette onde peut être considérée comme la superposition de deux OPPH dont on précisera les expressions des vecteurs d'onde (on donne: $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$).

3. En déduire deux façons de déterminer le champ magnétique de l'onde (sans faire le calcul entier, expliquer juste la démarche).

Réponses: 1- $\dfrac{\omega^2}{c^2} = \alpha^2 + \beta^2$ *2-* $\vec{k_1} = \alpha \vec{e_x} - \beta \vec{e_y}$ *et* $\vec{k_2} = \alpha \vec{e_x} + \beta \vec{e_y}$

VII. **Onde stationnaire**



On se propose d'étudier une onde électromagnétique entre deux milieux parfaitement conducteurs en $x < 0$ et $x > d$: $\vec{E} = E_0 f(x) \cos(\omega t) \vec{e_y}$.

1. Caractériser cette onde.

2. On admet que les champs électrique et magnétique sont nuls dans un métal parfaitement conducteur et que le champ électrique est continu. En déduire $f(0)$ et $f(d)$.

3. Ecrire l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique et en déduire l'équation différentielle vérifiée par $f(x)$. Déterminer la fonction $f(x)$ et montrer que la pulsation ω et le vecteur d'onde k sont nécessairement quantifiés.

4. Exprimer le champ magnétique de cette onde.

5. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting. Conclure.

Réponses : 2- $f(0) = f(d) = 0$ *3-* $\omega_n = \dfrac{n\pi c}{d}$ *4-* $\vec{B} = -\dfrac{E_0}{c} \cos(\dfrac{n\pi x}{d}) \sin(\omega t) \vec{e_z}$

VIII. **OPPH dans le vide**

Une onde em dont le champ électrique est donné par $\vec{E} = E_x \vec{e_x} + E_y \vec{e_y}$ avec $E_x = E_0 \cos(\dfrac{ax}{\sqrt{5}} + \dfrac{2ay}{\sqrt{5}} - \omega t)$ se propage dans le vide. Donnée: $\lambda = 600\ nm$.

1. Calculer la fréquence de l'onde. Exprimer $\vec{k}$ et $||\vec{k}||$ en déduire la valeur numérique de a. Exprimer le vecteur unitaire $\vec{u}$ dans la direction et le sens de l'onde.

2. Déduire d'une équation de Maxwell, l'expression de E_y à une constante additive près. Pourquoi peut-on prendre cette constante égale à 0?

3. Exprimer le champ magnétique de l'onde.

4. Exprimer la valeur moyenne du vecteur de Poynting. Commenter.

Réponses: 1- $f = 5.10^{14}\ Hz$, $a = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 1,05.10^7\ m^{-1}$ *et* $\vec{u} = \dfrac{\vec{e_x} + 2\vec{e_y}}{\sqrt{5}}$ *2-* $E_y = -\dfrac{E_0}{2} \cos(\dfrac{ax}{\sqrt{5}} + \dfrac{2ay}{\sqrt{5}} - \omega t)$ *3-* $\vec{B} = -\dfrac{\sqrt{5}E_0}{2c} \cos(\dfrac{ax}{\sqrt{5}} + \dfrac{2ay}{\sqrt{5}} - \omega t) \vec{e_z}$ *4-* $\vec{R} = \dfrac{5E_0^2}{8\mu_0 c} \vec{u}$

IX. **Polarisation d'une OPPH**

Identifier sur les expressions suivantes, la direction de propagation et la nature de la polarisation de l'onde: rectiligne, circulaire ou elliptique, droite ou gauche.

$\vec{E_a} = E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e_y} + E_0 \sin(\omega t + kx) \vec{e_z}$

$\vec{E_b} = 2E_0 \cos(\omega t - ky) \vec{e_x} - 3E_0 \cos(\omega t - ky) \vec{e_z}$

$\vec{E_c} = -3E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e_x} + E_0 \sin(\omega t - kz) \vec{e_y}$

$\vec{E_d} = 2E_0 \cos(\omega t + ky) \vec{e_x} + E_0 \cos(\omega t + ky - \pi/4) \vec{e_z}$