

CCB physique

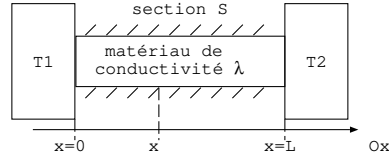
Le sujet comporte deux problèmes à traiter dans l'ordre de votre choix. Il est demandé de numéroter les pages au format i/N où i est le numéro de la page et N le nombre de pages. Tout résultat doit être justifié par une loi ou un schéma ou une explication...

I. Igloo

Partie I : généralités

Les habitants des régions polaires savent qu'un abri constitué de neige (igloo, abri sous arbre, trou à neige,...) offre un rempart efficace contre le froid. Nous allons nous intéresser ici au cas de l'igloo.

On considère un matériau solide de section S , de longueur L , calorifugé latéralement et placé au contact de deux thermostats de températures constantes T_1 et T_2 . On note ρ sa masse volumique, λ sa conductivité thermique, c sa capacité thermique massique et $T(x, t)$. On note respectivement $T(x, t)$ et $\vec{j}_{th}(x, t)$, la température et le vecteur densité de courant thermique à l'abscisse x à l'instant t .



Régime variable

1. Ecrire la loi de Fourier en précisant son sens physique.
2. Montrer, à l'aide d'un bilan thermique sur un système infinitésimal à préciser, que la température satisfait l'équation de diffusion: $\frac{\partial T}{\partial x}(x, t) = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t)$. Exprimer D en fonction des données.
3. Déterminer l'unité de la grandeur $\tau = \frac{\rho c L^2}{\lambda}$ et préciser sa signification concrète. Justifier physiquement, sans calcul, le fait que τ dépende de L^2 et non de L .
4. Le phénomène de diffusion thermique est-il un processus réversible? Justifier.

Régime stationnaire

On se place en régime stationnaire, on note $\mathcal{P}_{th}(x)$ la puissance thermique traversant la section S de solide en x , de la zone de température T_1 vers la zone de température T_2 .

5. Définir, par analogie entre les grandeurs électrique et thermique, la résistance thermique R_{th} .
6. Donner l'équation différentielle vérifiée par la température en régime stationnaire et en déduire l'expression de $T(x)$ en fonction de x , L , T_1 et T_2 .
7. Exprimer la puissance thermique $\mathcal{P}_{th}(x)$. Que remarquez-vous? En déduire l'expression de la résistance thermique du solide. Préciser comment évolue la résistance thermique en fonction de λ et justifier physiquement cette dépendance.

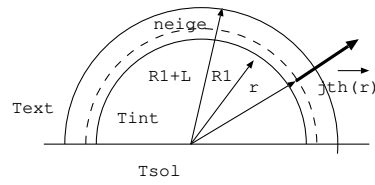
Lorsqu'un solide de température de surface T_s et un fluide, dont la température loin du solide est T_f , sont en contact par le biais d'une surface S' , on observe un transfert thermique entre le solide et le fluide. La loi de Newton donne le vecteur densité de courant thermique associé $j_{cc} = h(T_s - T_f)$ où h désigne le coefficient de transfert conducto-convectif.

8. Exprimer la résistance conducto-convective en fonction de h et S' .

Partie II: bilan thermique d'un igloo

On modélise un igloo par une demi-sphère creuse de rayon intérieur $R_1 = 1,5 \text{ m}$, fabriqué à partir de blocs de neige de conductivité thermique λ et d'épaisseur supposée constante égale à $L = 30 \text{ cm}$.

On note $T(r)$ et $\vec{j}_{th} = j_{th}(r)\vec{e}_r$, respectivement la température et le vecteur densité de courant thermique dans la neige pour $R_1 < r < R_1 + L$, en coordonnées sphériques. Les températures T_{ext} et T_{int} sont les températures à l'extérieur et à l'intérieur de l'igloo. On donne le gradient en coordonnées sphériques: $\vec{\text{grad}}f(r) = \frac{df}{dr}\vec{e}_r$.



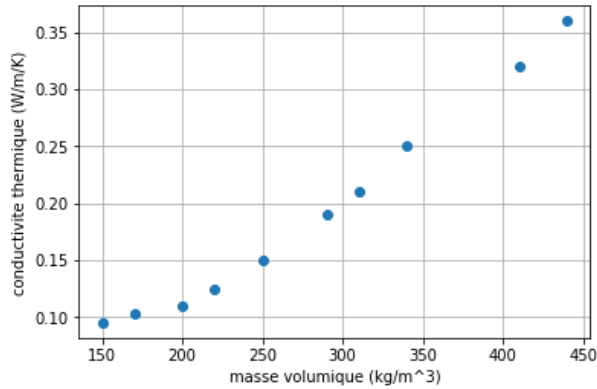
Résistance de l'igloo

9. On note $\mathcal{P}(r)$ la puissance thermique traversant la demi-sphère de rayon r . Exprimer $\mathcal{P}(r)$ en fonction de λ , r et $\frac{dT}{dr}$.

10. Montrer que $\mathcal{P}(r)$ ne dépend pas de r .

11. En déduire que la résistance thermique de l'igloo s'écrit $R_{th} = \frac{L}{2\pi\lambda R_1(R_1 + L)}$.

12. Une étude expérimentale a permis de mesurer la conductivité thermique λ de la neige en fonction de sa masse volumique ρ . Préciser si le fait de bien tasser les blocs de neige améliore ou non l'isolation de l'igloo. Pour une neige de masse volumique $\rho = 300 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, évaluer la résistance thermique de l'igloo.



La circulation d'air provoque de la conducto-convection que l'on prend en compte par le biais de résistances conducto-convectives intérieure et extérieure notée R_{cci} et R_{cce} . Ces résistances s'écrivent en fonction de h_i et h_e , les coefficients de transfert conducto-convectifs à l'intérieur et à l'extérieur de l'igloo.

13. Etablir un modèle électrique représentant l'igloo faisant figurer les trois résistances R_{th} , R_{cci} et R_{cce} . Déduire de ce modèle l'expression littérale de la résistance thermique équivalente de l'igloo en fonction de λ , h_e , h_i , L et R_1 .

Température intérieure de l'igloo

14. Les personnes se trouvant à l'intérieur de l'igloo dégagent une puissance thermique $\mathcal{P} = 300 \text{ W}$. On donne $T_{ext} = -40^\circ\text{C}$, $T_{sol} = -20^\circ\text{C}$, $R_{sol} = 1,3 \text{ K}\cdot\text{W}^{-1}$ et $R_{igloo} = 0,15 \text{ K}\cdot\text{W}^{-1}$. Calculer la température intérieure de l'igloo en régime stationnaire.

II. Ecoulement d'un fluide

L'étude d'écoulements au sein de microsystèmes, c'est-à-dire de canaux de taille de l'ordre de quelques dizaines de micromètres, présente aujourd'hui un enjeu industriel majeur. Des recherches portent sur l'utilisation de surfaces hydrophobes texturées pour lesquelles l'expérience met en évidence des propriétés de glissement des liquides à l'échelle de la microfluidique, donc une réduction des effets de friction de l'écoulement sur les parois solides. On propose dans ce problème d'étudier l'influence du glissement d'un liquide sur une paroi solide dans le cas d'un écoulement de Poiseuille plan. Le liquide considéré est assimilé à un fluide newtonien de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η . L'écoulement est stationnaire, incompressible et unidirectionnel. Il s'effectue entre deux plans, fixes dans le référentiel d'étude galiléen, de longueur L selon \vec{u}_x , de largeur considérée comme infinie selon \vec{u}_y , situés en $z = -h/2$ et $z = +h/2$ (figure 9).

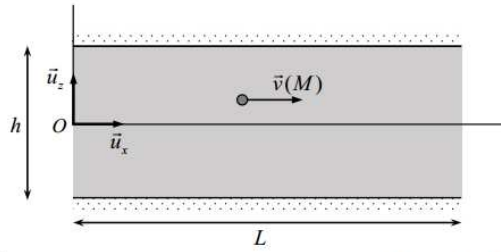


Figure 9 - Écoulement dans un canal rectangulaire (écoulement de Poiseuille plan)

L'écoulement est induit par un gradient de pression horizontal, appliqué parallèlement à la direction \vec{u}_x la forme $\frac{\partial P}{\partial x} = -K$ où K est une constante positive. Les effets de la pesanteur sont par ailleurs négligés. Dans ces conditions, le champ des vitesses en tout point M entre ces deux plans est de la forme $\vec{v}(M) = v_x(z)\vec{u}_x$ et l'équation de Navier-Stokes se réduit à la forme:

$$\rho(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \eta\Delta\vec{v}$$

1. Rappeler le sens physique de chacun des termes de l'équation de Navier-Stokes réduite de l'énoncé.
2. Calculer le nombre de Reynolds Re pour un écoulement d'eau dans un canal d'une hauteur de $10 \mu m$ à une vitesse typique de $1 mm.s^{-1}$. Comment se simplifie dans ces conditions l'équation de Navier-Stokes? Données: pour l'eau: $\rho = 10^3 kg.m^{-3}$ et $\eta = 1,00.10^{-3} Pl$.
3. Justifier que la forme supposée du champ des vitesses (écoulement parallèle) conduit à la même simplification et ce, indépendamment de la valeur du nombre de Reynolds.
4. Montrer finalement que l'équation de Navier-Stokes se réduit ici à: $-\frac{\partial P}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0$.

La condition de non glissement habituellement adoptée dans les écoulements à une échelle macroscopique suppose la vitesse relative liquide-solide nulle. L'existence d'un glissement observé à l'échelle micrométrique impose de fait une modification des conditions aux limites pour le champ des vitesses en $z = \pm h/2$. Navier puis Maxwell ont proposé d'écrire ces conditions sous la forme :

$$v_x(z = +h/2) = -L_g\frac{\partial v_x}{\partial z}(z = +h/2) \text{ et } v_x(z = -h/2) = +L_g\frac{\partial v_x}{\partial z}(z = -h/2)$$

où la longueur L_g est appelée longueur de glissement.

5. Dédurre de ces conditions aux limites que $v_x(z) = \frac{KL_g h}{2\eta} + \frac{K}{2\eta}(\frac{h^2}{4} - z^2)$.
6. Déterminer les positions théoriques z_0 des plans au niveau desquels le champ des vitesses devrait s'annuler. Dans l'hypothèse où $L_g \ll h$, montrer que $L_g = |z_0| - \frac{h}{2}$. Rappel: $\sqrt{1+\epsilon} \approx (1 + \frac{\epsilon}{2})$ pour $\epsilon \ll 1$.

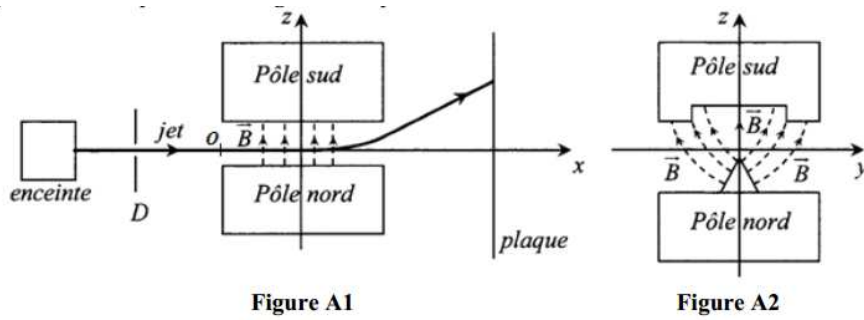
Justifier alors l'appellation longueur de glissement attribuée à la longueur L_g .

7. Poser l'intégrale (sans la résoudre) permettant de calculer le débit volumique D_v à travers une section droite comprise entre les deux plans et de largeur l selon \vec{u}_y . On admet pour la suite que $D_v = \frac{Klh^2}{2\eta}(L_g + \frac{h}{6})$.
8. Exprimer K en fonction de L et de la perte de charge $\Delta P = P(0) - P(L)$ imposée entre l'entrée ($x = 0$) et la sortie ($x = L$) du canal.
9. En déduire que $\Delta P = R_h D_v$. Donner l'expression de R_h en fonction de η , L_g et des dimensions du canal. Justifier par une analogie électrique le nom de "résistance hydraulique" qu'on lui donne.
10. En considérant que $\frac{L_g}{h} = 0,5$, calculer le rapport $\frac{R_h}{R_{h,ng}}$ où $R_{h,ng}$ désigne la résistance hydraulique en l'absence de glissement ($L_g = 0$). Conclure.

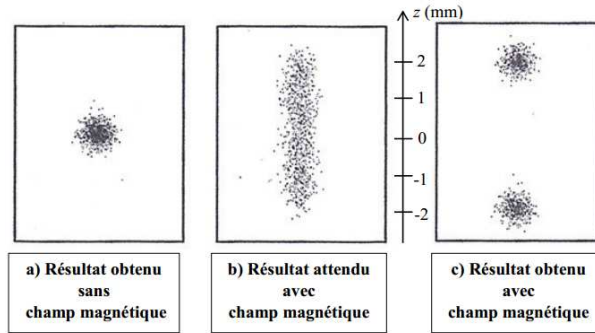
III. Expérience de Stern et Gerlach

L'expérience de Stern et Gerlach réalisée en 1922 est historiquement fondamentale car elle a permis de mettre en évidence la quantification du moment cinétique intrinsèque (dit de spin) de l'atome. Nous allons en examiner différents aspects.

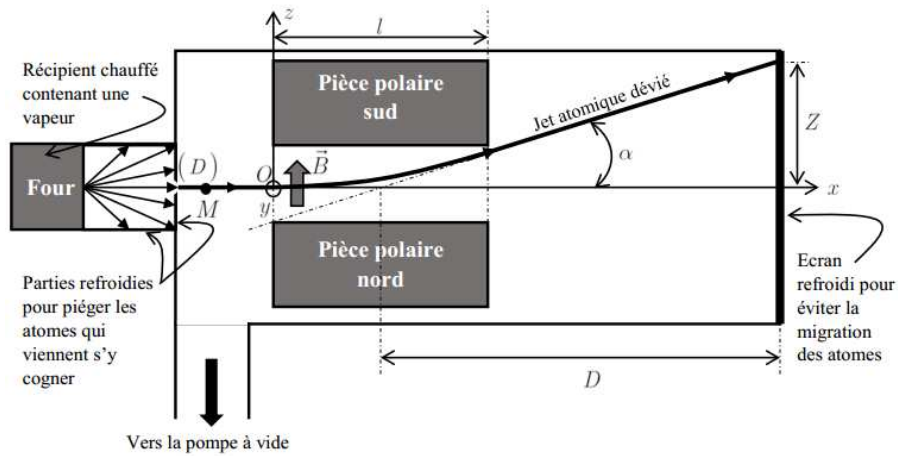
En 1922, Stern et Gerlach ont mesuré les valeurs du moment magnétique dipolaire des atomes d'argent avec le dispositif de la figure A1 représenté ci-dessous:



Tout le dispositif est placé dans un vide poussé où règne une pression inférieure au millipascal. Des atomes d'argent s'échappent par un petit orifice de l'enceinte (la source) chauffée à haute température. Ils se déplacent en ligne droite jusqu'à une fente (D) qui sélectionne les atomes qui ont une vitesse parallèle à l'axe des x . Le jet atomique pénètre alors dans l'entrefer d'un électroaimant dont la forme est choisie pour que le champ magnétique ne soit pas uniforme. L'allure des lignes de champ magnétique dans le plan (yOz) est donnée sur la figure A2. Le jet atomique est dévié par ce champ inhomogène. Quand il sort de l'électroaimant, il continue en ligne droite jusqu'à un écran où sont repérés les impacts des atomes. La figure A3 donne le résultat attendu par la mécanique classique ainsi que le résultat obtenu expérimentalement :



Le dispositif expérimental utilisé par Stern et Gerlach est représenté figure A4 (dans un souci de lisibilité, l'échelle et les proportions n'ont pas été respectées) :



Caractéristiques :
 Taille de la fente (D) d'entrée : $b = 1 \text{ mm}$
 Longueur de l'électroaimant : $l = 3,5 \text{ cm}$
 Distance entre le milieu de l'électroaimant et l'écran : $D = 1,8 \text{ cm}$
 Pression dans l'enceinte : $P = 1,0 \text{ mPa}$
 Température du jet à la sortie du four : $T = 1270 \text{ K}$
 Gradient de champ magnétique : $\frac{dB}{dz} = 500 \text{ T.m}^{-1}$

Données:

Masse molaire de l'argent: $M_{Ag} = 108 \text{ g.mol}^{-1}$

Rayon atomique des atomes d'argent: $r_{Ag} = 160 \text{ pm}$

Configuration électronique de l'argent: $Ag(Z = 47) : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 4d^{10} 5s^1$

Charge élémentaire: $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Masse de l'électron: $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Nombre d'Avogadro: $N_a = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Constante de Boltzmann: $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$

Constante des gaz parfaits: $R = k_B N_a = 8,314 \text{ J.K}^{-1} \text{ .mol}^{-1}$

Constante de Planck: $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$

Permittivité du vide: $\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$

Accélération de la pesanteur: $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

On négligera l'effet de la pesanteur devant toutes les autres forces en présence.

Analyse du jet d'atomes d'argent

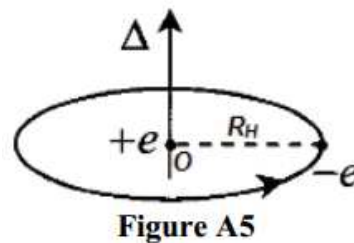
Les atomes d'argent présents dans le four se vaporisent et le jet de gaz obtenu en sortie se comporte comme un gaz parfait monoatomique à la température T . On supposera que les atomes ont alors tous la même énergie cinétique e_c (jet monocinétique) donnée par $e_c = \frac{3}{2} k_B T$.

1. Montrer que la vitesse quadratique moyenne des atomes d'argent est $v_0 = \sqrt{\frac{3RT}{M_{Ag}}}$. Faire l'AN.
2. Exprimer la densité volumique de particules d'argent n^* du jet, une fois celui-ci dans l'enceinte, en fonction de la pression dans l'enceinte P , de la température T et de la constante de Boltzmann k_B . Faire l'AN.
3. On désigne par libre parcours moyen la distance que parcourt un atome entre deux collisions. La physique statistique nous donne une expression simple de ce libre parcours moyen : $l^* = \frac{1}{4\pi r_0^2 n^*}$ où r_0 est le rayon de l'atome. Calculer le libre parcours moyen des atomes d'argent. Conclure quant à la validité du modèle du gaz parfait dans ce cas.

Analyse de la déflexion magnétique

Dans cette partie, on souhaite interpréter les résultats obtenus et les comparer aux résultats attendus par la mécanique classique (figure A3). Les atomes d'argent sont porteurs d'un moment magnétique noté \vec{M} dont la norme est du même ordre de grandeur que celle du magnéton de Bohr μ_B associé à l'atome d'hydrogène.

Le modèle de Bohr est une description semi-classique de l'atome d'hydrogène. Dans ce modèle, l'électron est en orbite circulaire uniforme de rayon $R_H = 53 \text{ pm}$, d'axe Δ autour d'un proton comme indiqué sur la figure A5. Ce proton est fixe et placé au centre O du référentiel d'étude supposé galiléen et associé aux coordonnées polaires (r, θ) . L'électron, supposé non relativiste, possède une charge $-e$ et une masse m_e .



4. Rappeler l'expression de la force électrostatique exercée par le proton sur l'électron. Justifier que l'action de la pesanteur puisse être négligée.
5. Montrer que la vitesse angulaire de l'électron s'écrit: $\omega = \frac{e}{2\sqrt{\pi m_e \epsilon_0 R_H^3}}$.
6. Exprimer la période du mouvement de l'électron T .
7. On assimile l'effet magnétique du mouvement de l'électron autour du proton à celui d'un courant $I > 0$ circulant dans une spire circulaire. Exprimer I pour cette boucle en fonction de e et de ω .
8. En déduire l'expression du moment magnétique \vec{M} associé à cette boucle de courant en fonction de e , R , ω , et \vec{e}_Δ , vecteur unitaire associé à l'axe Δ .
9. Montrer alors que le moment magnétique peut s'écrire: $\vec{M} = \gamma \vec{L}$ avec \vec{L} le moment cinétique de l'électron par rapport au point O et γ le rapport gyromagnétique. On donnera l'expression de γ en fonction de e et de m_e .
10. L'hypothèse de Planck, confirmée ensuite par la mécanique quantique, consiste à poser $\|\vec{L}\| = n\hbar$ où n est un entier positif et $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la constante de Planck réduite. Le magnéton de Bohr μ_B est la norme du moment magnétique de l'électron dans son état fondamental, correspondant à $n = 1$. Donner son expression en fonction de e , \hbar et m_e . Calculer μ_B .

Cas d'un champ magnétique uniforme dans l'entrefer

On suppose tout d'abord que l'électroaimant produit un champ uniforme dans l'entrefer $\vec{B} = B\vec{e}_z$ vertical qui ne perturbe pas l'orbite des électrons. On prendra $B = 1 \text{ T}$. On supposera que l'axe Δ portant le moment magnétique des atomes d'argent fait un angle θ constant avec Oz tel que $(\vec{B}, \vec{M}) = \theta$ comme indiqué figure A6.

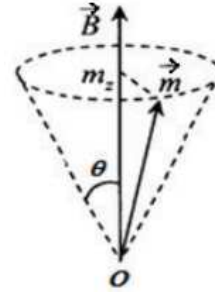


Figure A6

Le moment magnétique d'un atome d'argent s'écrit toujours $\vec{M} = \gamma \vec{L}$ où \vec{L} est ici le moment cinétique résultant de l'atome par rapport au point O .

On rappelle que le moment \vec{M} subit le couple $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ et a pour énergie potentielle $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$.

11. En appliquant le théorème du moment cinétique à l'atome, exprimer l'équation différentielle vérifiée par \vec{M} et montrer que $\frac{dM_z}{dt} = 0$ où M_z est la composante de \vec{M} sur Oz .

12. On admet que l'extrémité de \vec{M} tourne autour de \vec{B} en décrivant un cercle avec une pulsation $\Omega_L = \frac{eB}{2m_e}$. Evaluer la période de rotation T_L de \vec{M} autour de \vec{B} ainsi que le temps de trajet τ dans l'entrefer à l'aide de la question 1 et des données.

Justifier alors que la composante M_z peut être considérée comme uniforme et que les composantes M_x et M_y perpendiculaires au champ peuvent être considérées en moyenne comme nulles pendant la durée de traversée dans l'entrefer.

13. Calculer la force subie par les atomes dans l'entrefer et justifier qu'un champ uniforme ne peut être responsable de la déviation des atomes dans l'entrefer. On rappelle que pour une force conservative $\vec{F} = -\text{grad}E_p$.

Cas d'un champ magnétique non uniforme dans l'entrefer

On considère cette fois les conditions expérimentales dans lesquelles un champ non uniforme $\vec{B} = B(z)\vec{e}_z$ est présent dans l'entrefer de l'électroaimant dont la vue en coupe est fournie figure A2. On supposera que la composante M_z du moment magnétique des atomes reste toujours uniforme dans l'espace et dans le temps.

14. Traduire l'expression suivante: "le champ magnétique est à flux conservatif".

En analysant l'allure des lignes de champ dans l'entrefer, le champ est-il plus intense au niveau du pôle nord ou du pôle sud? En déduire le sens du vecteur $\text{grad}(B_z)$.

15. Montrer que la force subie par les atomes s'écrit simplement $\vec{F} = M_z \frac{dB_z}{dz} \vec{e}_z$. Evaluer l'ordre de

grandeur de cette force.

16. Justifier le résultat attendu par la mécanique classique (figure A3b).

Un atome d'argent de masse m_{Ag} (repéré par le point M sur la figure A4) entre dans la zone où règne le champ magnétique avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ au point d'origine O du repère cartésien (O, x, y, z) .

17. Déterminer les équations horaires $x(t)$ et $z(t)$ puis montrer que l'équation de la trajectoire s'écrit:

$$z(x) = \frac{M_z}{2m_{Ag}v_0^2} \frac{dB_z}{dz} x^2.$$

18. Justifier que pour $x > l$, les atomes d'argent suivent une trajectoire rectiligne jusqu'à l'écran. Montrer

que la pente a de cette trajectoire s'écrit $a = \frac{M_z}{m_{Ag}v_0^2} \frac{dB_z}{dz} l$.

19. En déduire que la déflexion Z (figure A4) sur l'écran s'écrit $Z = D \frac{M_z}{3k_B T} \frac{dB_z}{dz} l$.

20. A l'aide de la figure A3c, déterminer les deux valeurs des déflexions puis les deux valeurs possibles de M_z . Comparer au magnéton de Bohr.

21. En analysant la configuration électronique de l'atome d'argent, combien d'électrons célibataires contient-il ? En admettant que seuls les électrons de valence participent au moment magnétique de l'atome, conclure quant au résultat de la question précédente.

22. Quelle propriété quantique du moment cinétique de l'atome l'expérience de Stern et Gerlach a-t-elle pu révéler en 1922?

IV.

On assimile le sol à un milieu conducteur de conductivité γ . On modélise l'électrode en A du document 1 par le schéma de la figure 11. Dans le sol, on suppose que le vecteur densité volumique de courant en un point M placé à une distance r de A est de la forme $\vec{j}(M) = j(r)\vec{u}_r$ en coordonnées sphériques (figure 11).

1. Rappeler l'équation locale de conservation de la charge reliant $\vec{j}(M)$ à la densité volumique de charges $\mu(M)$. Simplifier cette équation en régime stationnaire. Comment peut-on alors qualifier le champ $\vec{j}(M)$?

2. Exprimer $j(r)$ en fonction de I et r . Rappeler la loi d'Ohm locale et en déduire l'expression de $\vec{E}(M)$.

3. En déduire que le potentiel au point M , dû à la présence de l'électrode en A, est donné par $V_A(M) = \frac{I}{2\pi\gamma r}$, en choisissant le potentiel à l'infini nul.

La contre-électrode placée dans le sol en B permet de recueillir le courant injecté en A et de fermer le circuit électrique (figure 12)