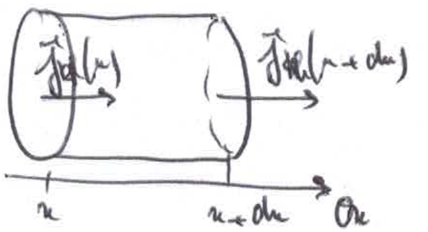
Correction : igloo

Q1 – La loi de Fourier s'écrit : $\vec{j}_{th} = -\lambda \, \overrightarrow{\text{grad}}\, T$

Elle montre que la diffusion thermique se fait dans le sens de $-\overrightarrow{\text{grad}}\, T$ soit des fortes vers les faibles températures. La diffusion est d'autant plus efficace que la conductivité est grande et que les différences de température sont importantes.

Q2 – Soit le système infinitésimal de section S compris entre x et $x+dx$.



On lui applique le 1er principe de la thermo. entre t et $t+dt$:

$$dU = \rho c S dx \left(T(x,t+dt) - T(x,t)\right) = \delta W + \delta Q$$

avec $\delta Q = \underbrace{j_{th}(x) S dt}_{\text{reçue}} - \underbrace{j_{th}(x+dx) S dt}_{\text{perdue}}$

et $\delta W = 0$

d'où $\rho c S dx \left(T(x,t+dt) - T(x,t)\right) = -\left[j_{th}(x+dx) - j_{th}(x)\right] S dt$

avec dx et dt petits : $\rho c S dx \dfrac{\partial T}{\partial t}(x,t) dt = -\dfrac{\partial j_{th}}{\partial x}(x,t) dx S dt$

avec $j_{th} = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}(x,t)$ d'après la loi de Fourier

d'où $\boxed{\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{\lambda}{\rho c} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$ équation de diffusion

par identification : $\boxed{D = \dfrac{\lambda}{\rho c}}$

Q3 – $[\lambda] = \left[\dfrac{\|\vec{j}_{th}\|}{\|\overrightarrow{\text{grad}}\, T\|}\right] = \dfrac{J\, m^{-2} s^{-1}}{K . m^{-1}} = J\, m^{-1} . K^{-1} . s^{-1}$

$[\rho] = kg\, m^{-3}$

$[c] = \left[\dfrac{dU}{\rho S dx\, dT}\right] = \left[\dfrac{dU}{m\, dT}\right] = J . K^{-1} . kg^{-1}$

d'où $[\tau] = \left[\dfrac{\rho c L^2}{\lambda}\right] = \dfrac{kg\, m^{-3}\; J K^{-1} kg^{-1}\; m^2}{J\, m^{-1} K^{-1} . s^{-1}} = s$

τ est homogène à un temps, c'est le temps caractéristique de diffusion thermique sur une distance L. On voit que τ est proportionnel à L^2, ce qui traduit que le phénomène n'est pas linéaire. En effet plus la diffusion se produit et plus les ≠ de températures sont faibles donc moins la diffusion est efficace.

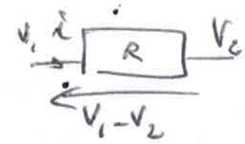
Q4. Quand on change t en $-t$, l'équation de diffusion devient :

$$\frac{\partial T}{\partial(-t)} = D\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{soit} \quad -\frac{\partial T}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$ l'équation est donc modifiée

On changer t en $-t$ revient à inverser le sens du temps. Le fait que l'équation différentielle, lors de ce changement, soit modifiée, traduit que la diffusion est <u>irréversible</u>. On s'y attendait puisque la loi de Fourier dit que la diffusion ne se fait que dans un sens, celui des fortes vers les faibles températures.

Q5. $V_1 - V_2$ est la différence de potentiel qui met en mouvement les charges, l'analogue de cette grandeur est $T_1 - T_2$, différence de températures qui crée le transfert thermique.

En électricité la loi d'Ohm s'écrit : $V_1 - V_2 = R\,i$



En thermique, par analogie, on a : $\boxed{T_1 - T_2 = R_{th} \times \Phi_{th}}$

Q6. En régime stationnaire, la température ne dépend pas du temps donc l'équation de diffusion $\frac{\partial T}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ devient $\frac{d^2T}{dx^2} = 0$ soit $\frac{dT}{dx} = A$ et $T(x) = Ax + B$

On trouve A et B avec les conditions aux limites :

$$T(x=0) = T_1 = B$$

$$T(x=L) = T_2 = AL + T_1 \quad \text{d'où} \quad A = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

On a donc : $\boxed{T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}\,x + T_1}$

Q7. La puissance thermique qui traverse la surface S en x s'écrit :

$$\boxed{\Phi_{th}(x) = j_{th}(x) \times S \underset{\text{loi de Fourier}}{=} -\lambda\,\frac{dT}{dx} \times S = -\lambda S\,\frac{T_2 - T_1}{L} = \lambda S\,\frac{T_1 - T_2}{L}}$$

cette puissance ne dépend pas de x, c'est la même sur toute surface S du matériau

On en déduit la résistance thermique :

$$\boxed{R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi_{th}} = \frac{L}{\lambda S}}$$

quand un matériau est isolant, il est traversé par un faible flux thermique, cela correspond à une grande résistance thermique (elle s'oppose au passage de la puissance thermique) et à une faible valeur de λ.

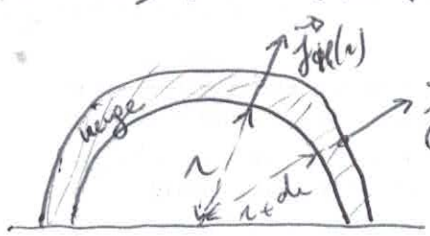
Q8. La résistance conducto-convective est définie par $\boxed{R_{cc} = \frac{T_S - T_f}{\Phi_{th}} = \frac{T_S - T_f}{j_{cc} \times S'} = \frac{1}{hS'}}$

Q9 _ La puissance thermique traversant la demi-sphère s'écrit :

$$\boxed{\Phi(r) = \underbrace{j_{th}(r) \times 2\pi r^2}_{\text{surface de la demi-sphère}} = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r^2}$$

d'après la loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda \, \overrightarrow{grad}\, T(r) = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$

Q10 _ Soit le système infinitésimal compris entre les demi-sphères de rayons r et $r+dr$ avec $r > R_1$ et $r + dr < R_1 + L$:



En régime stationnaire, la température de ce système est constante donc l'énergie thermique reçue est égale à l'énergie thermique perdue

soit $\underbrace{\Phi_1(r)\,dt}_{\text{énergie reçue}} = \underbrace{\Phi_1(r+dr)\,dt}_{\text{énergie perdue}}$

ainsi $\Phi(r) = \Phi(r+dr)$ donc Φ est une constante (donc ne dépend pas de r)

Q11 _ On a donc : $\Phi = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r^2$ soit après séparation des variables :

$$\Phi \frac{dr}{r^2} = -2\pi\lambda \, dT$$

On intègre entre $r = R_1$ et $r = R_1 + L$:

$$\Phi \int_{R_1}^{R_1+L} \frac{dr}{r^2} = -2\pi\lambda \int_{T(R_1)=T_{int}}^{T(R_1+L)=T_{ext}} dT$$

soit $\Phi \left(-\frac{1}{R_1+L} + \frac{1}{R_1} \right) = -2\pi\lambda \left(T_{ext} - T_{int} \right)$

ou encore $\Phi \left(\frac{-R_1 + R_1 + L}{R_1(R_1+L)} \right) = 2\pi\lambda \left(T_{int} - T_{ext} \right)$

d'où $\boxed{R_{th} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{\Phi} = \frac{L}{2\pi\lambda R_1 (R_1+L)}}$

Q12 _ Lorsqu'on tasse la neige, sa masse volumique augmente et sa conductivité thermique aussi, donc la neige tassée laisse passer plus facilement le transfert thermique : l'isolation de l'igloo est moins bonne.

On lit pour $\rho = 300\ \text{kg.m}^{-3}$, $\lambda = 0{,}2\ \text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

AN : $R_{th} = \frac{0{,}3}{2\pi \times 0{,}2 \times 1{,}5 \times 1{,}8} = 8{,}8 . 10^{-2}\ \text{K.W}^{-1}$

Q13 _ Schéma réel :

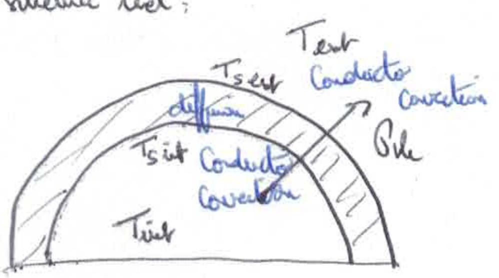
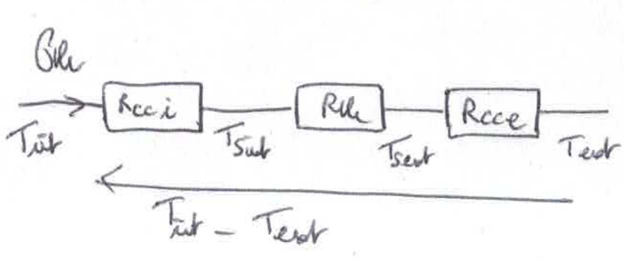


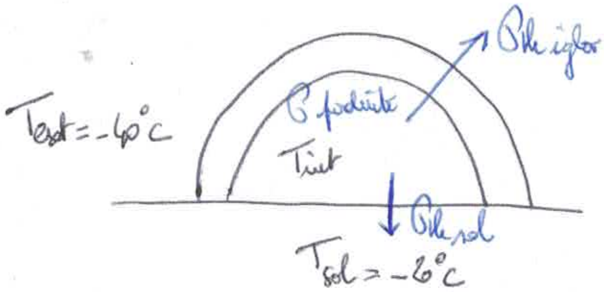
schéma électrique équivalent :



avec $R_{cc_i} = \dfrac{1}{h_i \, 2\pi R_1^2}$, $R_{cce} = \dfrac{1}{h_e \, 2\pi (R_1+L)^2}$ et $R_{th} = \dfrac{L}{2\pi\lambda (R_1+L) R_1}$

La résistance équivalente est $\boxed{R_{éq} = R_{cc_i} + R_{cce} + R_{th}}$

Q14- Schéma de la situation :



La température de l'air à l'intérieur de l'igloo est constante (régime stationnaire) donc la puissance reçue par l'air est égale à la puissance perdue par l'air :

$$\underbrace{P}_{\text{puissance reçue, produite par les occupants de l'igloo}} = \underbrace{P_{th,igloo} + P_{th,sol}}_{\text{puissance perdue par le sol et par la neige de l'igloo}}$$

avec $P_{th,igloo} = \dfrac{T_{int} - T_{ext}}{R_{igloo}}$ et $P_{th,sol} = \dfrac{T_{int} - T_{sol}}{R_{sol}}$

d'où $P = T_{int}\left(\dfrac{1}{R_{igloo}} + \dfrac{1}{R_{sol}}\right) - \dfrac{T_{ext}}{R_{igloo}} - \dfrac{T_{sol}}{R_{sol}}$

d'où $\boxed{T_{int} = \dfrac{P + \dfrac{T_{ext}}{R_{igloo}} + \dfrac{T_{sol}}{R_{sol}}}{\dfrac{1}{R_{igloo}} + \dfrac{1}{R_{sol}}} = \dfrac{R_{igloo} R_{sol} P + R_{sol} T_{ext} + R_{igloo} T_{sol}}{R_{sol} + R_{igloo}}}$

⚠ mettre les températures en Kelvin

AN : $T_{int} = 275 \text{ K}$ ou $2°C$