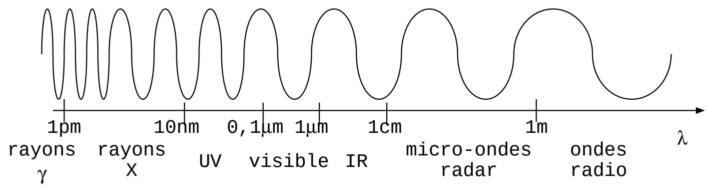
# Chapitre EM 9 : Ondes em dans le vide

Soit en un point de l'espace des charges et/ou des courants fonctions du temps. Ils créent en leur voisinage un champ électromagnétique variable. Ce champ électromagnétique variable est source d'un champ électromagnétique en son voisinage... et ainsi de proche en proche, le champ électromagnétique se propage. Il s'agit donc d'un phénomène ondulatoire.

Spectre des ondes électromagnétiques




## I. Equations de propagation des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

### 1. Rappel

L'équation de propagation est l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la grandeur perturbation de l'onde.

Pour les ondes mécaniques, on obtient l'équation de propagation en appliquant la RFD au système élémentaire entre $x$ et $x+dx$.

Pour les ondes sur un câble électrique, on obtient l'équation de propagation en appliquant les lois des noeuds et des mailles.

Pour les ondes électromagnétiques, on obtient l'équation de propagation en utilisant les éq. de Maxwell et l'équation mathématique : $\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{a}) = \vec{grad}(div\,\vec{a}) - \Delta\vec{a}$ donnée dans un énoncé

### 2. Equations de propagation de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le vide

Les équations de Maxwell dans le vide (en dehors des courants et des charges qui ont donné naissance à l'onde) s'écrivent:

MG : $div\,\vec{E} = 0$ $(\rho = 0)$ MF : $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

MT : $div\,\vec{B} = 0$ MA : $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $(\vec{j} = \vec{0})$

*Equation de propagation de* $\vec{E}$

$$\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{E}) = \vec{grad}(\cancel{div\,\vec{E}}) - \Delta\vec{E}$$

$$\vec{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{rot}\,\vec{B}) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\Delta\vec{E}$$

d'où $\Delta\vec{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

on reconnaît une éq. de d'Alembert avec $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

*Equation de propagation de* $\vec{B}$

$$\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{B}) = \vec{grad}(\cancel{div\,\vec{B}}) - \Delta\vec{B}$$

$$\vec{rot}\left(\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{rot}\,\vec{E}) = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\Delta\vec{B}$$

d'où $\Delta\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$

### 3. Au sujet de l'opérateur Laplacien

En coordonnées cartésiennes, $\Delta\vec{E} = \dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2}$

Exemple: exprimer $\Delta\vec{E}$ pour $\vec{E_1} = \vec{E_0}\sin(\omega t + kz)$ et $\vec{E_2} = \vec{E_0}\cos(\alpha x)\cos(\omega t - ky)$

$$\Delta\vec{E_1} = -k^2\vec{E_1}$$

$$\Delta\vec{E_2} = -\alpha^2\vec{E_2} - k^2\vec{E_2}$$

En coordonnées sphériques, l'opérateur Laplacien est donné dans l'énoncé.

Exemple: cas particulier où $E = E(r,t)$ vérifie l'équation de d'Alembert $\Delta E - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$.

On donne le laplacien scalaire: $\Delta E = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2(rE)}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\dfrac{\partial E}{\partial\theta}) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 E}{\partial\phi^2}$

On a donc : $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2(rE)}{\partial r^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$

Donc $\dfrac{\partial^2(rE)}{\partial r^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2(rE)}{\partial t^2} = 0$ | On reconnaît que $rE(r,t)$ vérifie une éq. de d'Alembert

## II. Solutions en OPPH

Le programme limite l'étude des solutions aux ondes progressives planes harmoniques dites $OPPH$.

### 1. Rappels

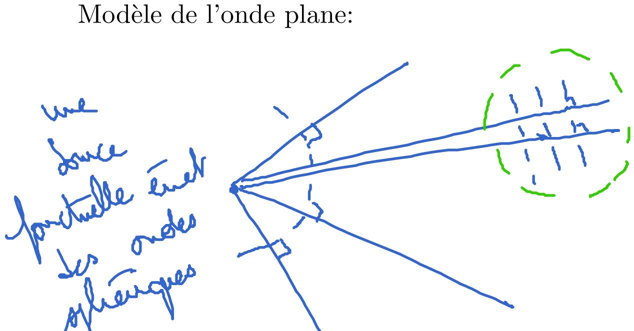
Définition d'une onde plane: onde pour laquelle l'amplitude de l'onde (à tout instant $t$) est la même dans tout plan $\perp$ à la direction de propagation.

Exemples: $\underbrace{\vec{E} = \vec{E_0}\cos(\omega t + kx)}_{\text{onde plane}}$ et $\vec{E} = \vec{E_0}\sin(\alpha y)\cos(\underbrace{\omega t - kz})$

onde plane qui se propage selon $-Ox$
$E = $ cste pour $x = $ cste

onde qui se propage selon $(Oz)$
non plane car $E$ n'est pas cste dans les plans $z = $ cste

Modèle de l'onde plane:




loin de la source, les rayons sont quasi-parallèles et les surfaces $\perp$ à l'onde sont des plans terme de phase (t et $\vec{OM}$ sont dans le terme, l'onde se propage)

## 2. Ecriture des solutions en notation réelle

On propose une solution de la forme $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}\cos(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM} + \phi)$

deux périodes :

T : période temporelle

$\lambda$ : longueur d'onde (période spatiale)

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ pulsation

$\overrightarrow{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{u}$ vecteur d'onde $\|\vec{k}\| = \frac{2\pi}{\lambda}$ pulsation spatiale

$\hat{u}$ : vecteur unitaire dans le sens et la direct de la propagation

Exemple pour $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{e_x}$, le champ électrique est de la forme:

$\vec{k}.\vec{OM} = kx$ $\quad\quad$ $\vec{E} = \vec{E_0}\cos(\omega t - kx + \phi)$

Exemple pour $\overrightarrow{k} = -k\overrightarrow{e_y}$, le champ électrique est de la forme:

$\vec{k}.\vec{OM} = -ky$ $\quad\quad$ $\vec{E} = \vec{E_0}\cos(\omega t + ky + \phi)$

Exemple pour $\overrightarrow{k} = k\cos\alpha\overrightarrow{e_x} - k\sin\alpha\overrightarrow{e_z}$, le champ électrique est de la forme:

$\vec{k}.\vec{OM} = k\cos\alpha\, x - k\sin\alpha\, z$ $\quad\quad$ $\vec{E} = \vec{E_0}\cos(\omega t - k\cos\alpha\, x + k\sin\alpha\, z + \phi)$

A retenir: les deux écritures possibles:

$\vec{E} = \vec{E_0}\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{OM} + \phi)$

avec $\vec{k}$ en notation vectorielle, il y a toujours un $-$

pour une OPPH qui se propage selon $-Ox$

$\vec{E} = \vec{E_0}\cos(\omega t \pm kx + \phi)$

pour une OPPH qui se propage selon $+Ox$

## 3. Utilisation de la notation complexe

On propose une solution de la forme $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}\cos(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM})$

cos devient $e^j$

Pour simplifier les calculs, on utilise la notation complexe: $\underline{\overrightarrow{E}} = \vec{E_0}e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{OM})}$

Passage de la notation complexe à la notation réelle: $\vec{E} = Re(\underline{\vec{E}})$

L'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ s'écrit $\times j\omega$

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ s'écrit $\times(j\omega)^2 = -\omega^2$

L'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$ s'écrit $\times(-j\vec{k})$

L'opérateur $\Delta$ s'écrit $\times(-j\vec{k})^2 = -k^2$

(on pense "c'est la dérivée par rapport à $\overrightarrow{OM}$")

(on pense "c'est la dérivée seconde par rapport à $\overrightarrow{OM}$")

Remarque: l'énoncé peut proposer aussi la notation complexe $\underline{\overrightarrow{E}} = \vec{E_0}e^{j(\vec{k}.\vec{OM} - \omega t)}$

L'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ s'écrit $\times(-j\omega)$

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ s'écrit $\times(j\omega)^2 = -\omega^2$

L'opérateur $\overrightarrow{\nabla}$ s'écrit $\times(j\vec{k})$

L'opérateur $\Delta$ s'écrit $\times(j\vec{k})^2 = -k^2$

(on pense "c'est la dérivée par rapport à $\overrightarrow{OM}$")

(on pense "c'est la dérivée seconde par rapport à $\overrightarrow{OM}$")

Les résultats physiques (relation de dispersion et relations de structure) sont les mêmes avec les deux notations.

### 4. Relation de dispersion

C'est la relation entre $k$ et $\omega$, on l'obtient en injectant la solution proposée pour $\overrightarrow{E}$ (ou $\overrightarrow{B}$) dans l'équation de propagation.

Soit une onde de la forme $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0}\cos(\omega t - kx)$.

En notation réelle: $\vec{E}$ vérifie l'ép. de d'Alembert $\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

$$\Delta\vec{E} = \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} = -k^2\vec{E}$$

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2\vec{E}$$

donc $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ ou $\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$

En notation complexe: $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{OM})}$ vérifie l'ép. de d'Alembert $\Delta\underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \vec{0}$

$$\Delta\underline{\vec{E}} = (-j\vec{k})^2\underline{\vec{E}} = -k^2\underline{\vec{E}}$$

$$\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = (j\omega)^2\underline{\vec{E}} = -\omega^2\underline{\vec{E}}$$

donc $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

On en déduit la vitesse de phase: $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$ : les ondes de fréquences $\neq$ ont toutes la même vitesse $c$, il n'y a pas dispersion

### 5. Structure des OPPH

On utilise ici la notation complexe $\underline{\overrightarrow{E}} = \overrightarrow{E_0}e^{j(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM})}$.

M.G. $div\underline{\overrightarrow{E}} = \vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{E}} = -j\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0$ d'où $\vec{k} \perp \vec{E}$ : l'onde électrique est transverse

M.T. $div\underline{\overrightarrow{B}} = \vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{B}} = -j\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0$ d'où $\vec{k} \perp \vec{B}$ : l'onde magnétique est transverse

M.F $\overrightarrow{\text{rot}}\underline{\overrightarrow{E}} = \vec{\nabla}\wedge\underline{\vec{E}} = -j\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t} = -j\omega\underline{\vec{B}}$

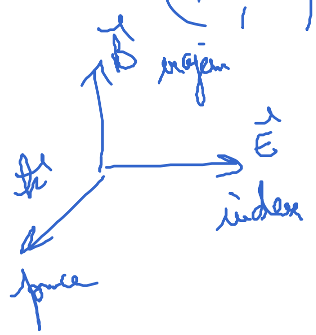
d'où $\boxed{\underline{\vec{B}}} = \frac{+j\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{j\omega} = \boxed{\frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}}$ relation de structure ; ou dans le vide : $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}$ $\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{u}\wedge\vec{E}}{c}}$

∇A $\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\overrightarrow{B}} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \underline{\vec E}}{\partial t}$ donc $\nabla \wedge \underline{\vec B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \underline{\vec E}}{\partial t}$ soit $-j\vec k \wedge \underline{\vec B} = \frac{j\omega \underline{\vec E}}{c^2}$

d'où $\underline{\vec E} = c^2\, \underline{\vec B} \wedge \vec k$

*Conclusion* : $(\vec k, \vec E, \vec B)$ forment un trièdre orthogonal direct

P




$$\vec B = \frac{\vec k \wedge \vec E}{\omega}$$ pour une OPPH

$$\|\vec B\| = \frac{\|\vec k\|.\|\vec E\|}{\omega} = \frac{\|\vec E\|}{c}$$

Dans les exemples suivants donner la direction de polarisation du champ électrique (c'est la direction de $\overrightarrow{E}$), la direction de propagation, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{B}$.

$\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{e_z}\cos(\omega t - ky)$

l'onde est polarisée selon $\vec{e_z}$

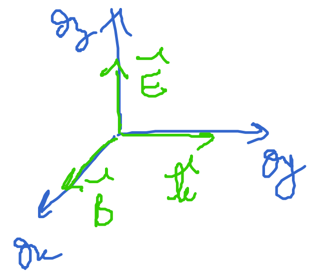
plane : l'onde se propage selon (+ Oy)

$\vec u = \vec{e_y}$

$\vec k = \frac{\omega}{c}\vec{e_y}$

$$\vec B = \frac{\vec k \wedge \vec E}{\omega} = \frac{E_0}{c}\vec{e_y}\wedge\vec{e_z}\cos(\omega t - ky)$$

$$= \frac{E_0}{c}\vec{e_x}\cos(\omega t - ky)$$




$\underline{\overrightarrow{E}} = -E_0\overrightarrow{e_y}e^{j(\omega t + kx)}$

onde polarisée selon (Oy)

plane : l'onde se propage selon (− Ox)

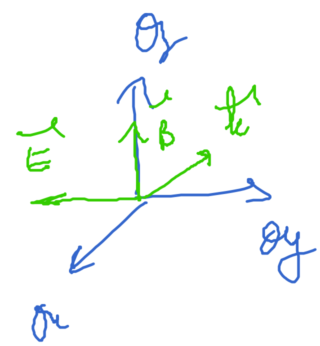
$\vec u = -\vec{e_x}$

$\vec k = -\frac{\omega}{c}\vec{e_x}$

$$\underline{\vec B} = \frac{\vec k \wedge \underline{\vec E}}{\omega} = \frac{\vec u \wedge \underline{\vec E}}{c}$$

$$\underline{\vec B} = -\frac{\vec{e_x}\wedge(-E_0\vec{e_y})e^{j(\omega t + kx)}}{c}$$

$$= +\frac{E_0}{c}\vec{e_z}e^{j(\omega t + kx)}$$




## III. Etude énergétique

Les grandeurs énergétiques associées à une OPPH sont:

-la *densité volumique d'énergie em*: $u_{em} = \frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$ en $J.m^{-3}$

- le *vecteur de Poynting*: $\overrightarrow{R} = \frac{\vec E \wedge \vec B}{\mu_0}$ en $W.m^{-2}$

plan : l'onde se propage selon $(Ox)$

## 1. Etude en notation réelle

On étudie une onde de la forme $\overrightarrow{E} = E_0 \overrightarrow{e_y} \cos(\omega t - kx)$.

Expression du champ magnétique:

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} = \frac{\vec{e_x} \wedge E_0 \vec{e_y} \cos(\omega t - kx)}{c} = \frac{E_0}{c} \vec{e_z} \cos(\omega t - kx)$$

Expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique:

$$u_{em} = \frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\varepsilon E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)}{2} + \underbrace{\frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t - kx)}_{= \frac{E_0^2 \varepsilon}{2} \cos^2(\omega t - kx)} \quad \text{car } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon}$$

l'énergie se répartit équitablement entre l'énergie électrique et l'énergie magnétique

Expression du vecteur de Poynting: $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0 \vec{e_y} \cos(\omega t - kx)}{\mu_0} \wedge \frac{E_0}{c} \vec{e_z} \cos(\omega t - kx)$

$$\vec{R} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{e_x} \qquad \langle \vec{R} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e_x}$$

dans le sens et la direct° de propagation de l'onde

## 2. Attention à la notation complexe

On ne peut pas utiliser la notation complexe pour déterminer les valeurs instantanées de $\overrightarrow{R}$ et de $u_{em}$.

La notation complexe ne s'utilise que pour calculer des valeurs moyennes dans le temps en utilisant des expressions données dans un sujet:

$< fg >= \frac{1}{2} \mathcal{R}e(\underline{f}.\underline{g}^*)$ où $\underline{g}^*$ désigne le complexe conjugué de $\underline{g}$.

Cette expression donne:

$< u_{em} >= \frac{1}{2} \mathcal{R}e\left(\varepsilon \underline{\vec{E}} . \underline{\vec{E}}^*\right) + \frac{1}{2} \mathcal{R}e\left(\frac{\underline{\vec{B}} \, \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0}\right)$

$< \overrightarrow{R} >= \frac{1}{2} \mathcal{R}e\left(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0}\right)$

l'onde se propage selon $-Oz$

Exemple : soit l'onde de champ électrique $\overrightarrow{\underline{E}} = E_0 \overrightarrow{e_x} e^{j(\omega t + kz)}$. Exprimer le champ magnétique $\overrightarrow{\underline{B}}$ associé, la valeur moyenne du vecteur de Poynting et la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie électromagnétique. Exprimer le champ électromagnétique en notation réelle et en déduire le vecteur de Poynting instantané.

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} = \frac{-\vec{e_z} \wedge \vec{E}}{c} = -\frac{E_0}{c} \vec{e_y} e^{j(\omega t + kz)}$$

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \mathcal{R}e\left(+E_0 \vec{e_x} e^{j(\omega t + kz)} \wedge \left(-\frac{E_0}{c} \vec{e_y}\right) e^{-j(\omega t + kz)}\right) = \frac{1}{2\mu_0} \mathcal{R}e\left(-\frac{E_0^2}{c} \vec{e_z}\right)$$

$$= \frac{-E_0}{2\mu_0 c} \vec{e_z}$$ : dans le sens et la direct° de propagat° de l'onde

$$\langle u_e \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} \mathrm{Re}\left( E_0 \vec{e_x} e^{j(\omega t + ky)} \cdot E_0 \vec{e_x} e^{-j(\omega t + ky)} \right) = \frac{E_0^2 \varepsilon_0}{2}$$

$$\langle u_m \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \mathrm{Re}\left( -\frac{E_0}{c} \vec{e_y} e^{j(\omega t + ky)} \left(-\frac{E_0}{c}\vec{e_y}\right) e^{-j(\omega t + ky)} \right) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{\varepsilon E_0^2}{2}$$

En notat° réelle :

$$\vec{E} = \mathrm{Re}(\underline{\vec{E}}) = E_0 \vec{e_x} \cos(\omega t + ky)$$

$$\vec{B} = \mathrm{Re}(\underline{\vec{B}}) = -\frac{E_0}{c} \vec{e_y} \cos(\omega t + ky)$$

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

## IV. Quand les ondes ne sont pas des OPPH

**1. Généralisation aux ondes non harmoniques** : les OPPH n'ont pas de réalité physique:

- les sources qui émettent de façon isotrope dans toutes les directions de l'espace émettent des ondes sphériques, le laser émet une onde gaussienne. Cela remet en cause l'hypothèse onde plane

- les sources émettent dans un certain domaine de longueur d'onde $\Delta\lambda = c\tau$ où $\tau$ est la durée d'émission d'un train d'onde. Cela remet en cause l'hypothèse onde harmonique

Les OPPH présentent tout de même un intérêt, en effet une onde non harmonique de direction de propagation $\vec{u}$ peut se décomposer en somme d'ondes planes harmoniques de pulsation $\omega$ différentes et de longueurs d'onde $\lambda$ différentes : cela résulte du **théorème de superposition que l'on peut appliquer grâce à la linéarité des équations de Maxwell**.

**2. Des exemples d'onde qui ne sont pas des OPPH**

Exemple 1: soit une onde dont le champ électrique est donné par : $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \sin(ky) \vec{e_x}$

Nature de l'onde: onde stationnaire car t et y dans des termes $\neq$

Le champ magnétique associé s'écrit: $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ n'est pas valable : ce n'est pas une OPPH

utiliser MF. $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting est:

Exemple 2: soit une onde dont le champ électrique est donné par : $\overrightarrow{E} = E_0 \sin(\beta z)\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{e_y}$

Nature de l'onde: onde stationnaire selon Oz
progressive selon (Ox)
non plane car pour $x = \text{cste}$, l'amplitude de $\vec{E}$ n'est pas cste

Le champ magnétique associé se déduit de: $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ n'est pas valable car ce n'est pas une OPPH

on utilise MF : $\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$