Chapitre EM 11 : absorption-dispersion

Lorsque l'on néglige les phénomènes dissipatifs (force de viscosité dans les fluides, frottements sur une corde,...), l'équation de propagation est de type d'Alembert de la forme: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

La relation de dispersion s'écrit alors: $k = \frac{\omega}{c}$

Cette relation de dispersion traduit que les ondes se propagent à la même vitesse c quelle que soit leur fréquence. On dit qu'il n'y a pas dispersion. en effet $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$ est la m̂ pour toutes les ondes de fréquences différentes

Ce chapitre aborde le cas des ondes mécaniques en présence de phénomènes dissipatifs ou d'ondes électromagnétiques se propageant dans un milieu matériel tel que l'onde interagit avec les particules chargées de ce milieu. Dans ces exemples, l'onde peut subir:

- de l'absorption : l'onde perd de l'énergie au cours de sa propagation donc son amplitude diminue (c'est le milieu de propagation qui prend de l'énergie à l'onde)

- de la dispersion : la vitesse de l'onde dépend de sa fréquence donc les ondes de fréquences différentes ne vont pas à la m̂ vitesse

I. Absorption

L'absorption se manifeste lorsque l'équation de propagation n'est pas une équation de d'Alembert et qu'elle présente des dérivées partielles d'ordre impair qui traduisent la présence de phénomènes irréversibles
Dans ce cas la relation de dispersion donne un vecteur d'onde qui est un nombre complexe.

Sens physique d'un vecteur d'onde complexe:

Pour comprendre le sens physique d'un vecteur d'onde complexe prenons l'exemple d'un champ électrique de la forme $\underline{\overrightarrow{E}} = \overrightarrow{E_0} e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$ avec $\underline{k} = k' - ik''$ où k' et k'' sont des réels positifs.

$$\underline{\overrightarrow{E}} = \overrightarrow{E_0} e^{i(\omega t - k'x + ik''x)}$$
$$= \overrightarrow{E_0} e^{-k''x} e^{i(\omega t - k'x)}$$

$$\overrightarrow{E} = Re(\underline{\overrightarrow{E}}) = \underbrace{\overrightarrow{E_0} e^{-k''x}}_{\text{amplitude de l'onde}} \cos\underbrace{(\omega t - k'x)}_{\text{terme de phase}}$$

amplitude de l'onde qui ↓ quand x ↑ donc l'amplitude ↓ quand l'onde se propage

terme de phase : l'onde se propage selon $+Ox$ et $v_\varphi = \frac{\omega}{k'}$

Conclusion:

La partie réelle de k traduit la propagation
(c'est k')

La vitesse de phase d'une OPPH de pulsation ω s'écrit donc $v_\varphi = \frac{\omega}{Re(\underline{k})}$

La partie imaginaire traduit l'absorption : l'amplitude de l'onde diminue au cours de sa propagation
(c'est k'')

La distance caractéristique de pénétration de l'onde dans un milieu est $\boxed{\delta = \frac{1}{|Im(\underline{k})|}}$ c'est l'épaisseur de peau ♡

Pour $x > 5\delta$: l'amplitude de l'onde est nulle

Remarque très importante : l'équation de propagation conduit à une relation de dispersion donnant l'expression de $\underline{k}^2$ (qui vient du terme ....$\Delta\vec{E}$..........................). Dans le cas général, $\underline{k}^2$ est un nombre complexe avec une partie réelle et une partie imaginaire non nulles. On doit ensuite en déduire $\underline{k}$.

Cas 1: $\underline{k}^2$ est un réel positif: $\underline{k}$ est un réel positif

$Re(\underline{k}) \neq 0$ il y a propagation

$Im(\underline{k}) = 0$ il n'y a pas d'absorption

Cas 2: $\underline{k}^2$ est un réel négatif: $\underline{k}^2 = -k^2$ donc $\underline{k} = \pm i k$

$Re(\underline{k}) = 0$ il n'y a pas de propagation

$Im(\underline{k}) \neq 0$. il y a absorption

c'est une OS amortie, on l'appelle onde évanescente

Cas 3: $\underline{k}^2$ est un imaginaire pur dont la partie imaginaire est négative: $\underline{k}^2 = -i\alpha^2 = e^{-i\pi/2}\alpha^2$

Soit $\underline{k} = e^{-i\pi/4}\alpha = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\alpha$

$Re(\underline{k}) \neq 0$ il y a propagation

$Im(\underline{k}) \neq 0$ il y a absorption

$v_\varphi = \frac{\omega}{Re(\underline{k})} = \frac{\sqrt{2}\,\omega}{\alpha}$

$\delta = \frac{1}{|Im(\underline{k})|} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}$ épaisseur de peau

Cas 4: les parties réelle et imaginaire de $\underline{k}^2$ ne sont pas nulles. Le calcul de l'expression de $\underline{k}$ est alors compliqué.

Soit l'énoncé demande de comparer les valeurs numériques de la partie réelle et de la partie imaginaire et de ne garder qu'un seul terme, le plus grand en valeur absolue. On se ramène alors à une des trois situations évoquées ci-dessus.

Soit l'énoncé demande de poser $\underline{k} = k_1 + ik_2$. $\underline{k}^2 = k_1^2 - k_2^2 + 2ik_1k_2$

hyp 1. $\underline{k}^2 = k_1^2 - k_2^2 > 0$ hyp 2. $\underline{k}^2 = k_1^2 - k_2^2 < 0$ hyp$_3$: $\underline{k}^2 = 2ik_1k_2$

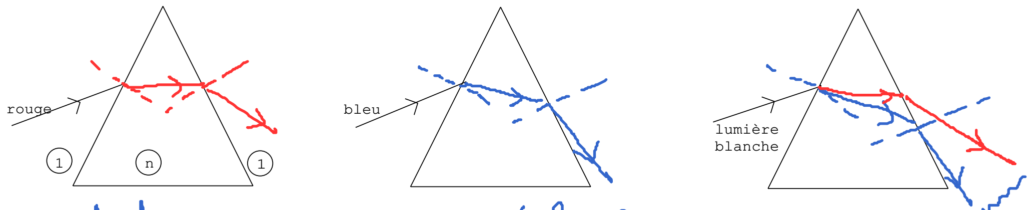
II. Dispersion

1. *Définition et exemples:*

Un milieu ou un système est dit dispersif si les ondes de fréquences différentes n'ont pas la même vitesse.

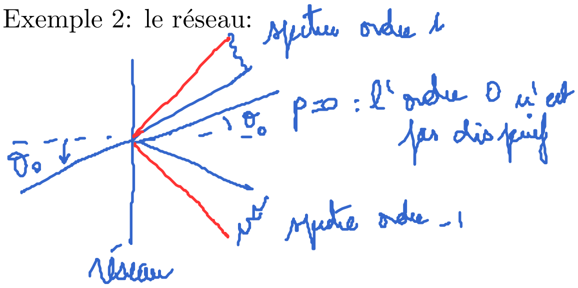
Exemple 1: le verre est un milieu dispersif (l'indice du verre dépend de la longueur d'onde, on donne la loi de Cauchy : $n = n_1 + \frac{n_2}{\lambda^2}$).

$n_{rouge} < n_{bleu}$: le bleu est + dévié que le rouge



les ondes de fréquences ≠ ne vont pas à la même vitesse donc elles ne suivent pas

Exemple 2: le réseau:



$\sin\theta_p - \sin\theta_0 = p\frac{\lambda}{a}$

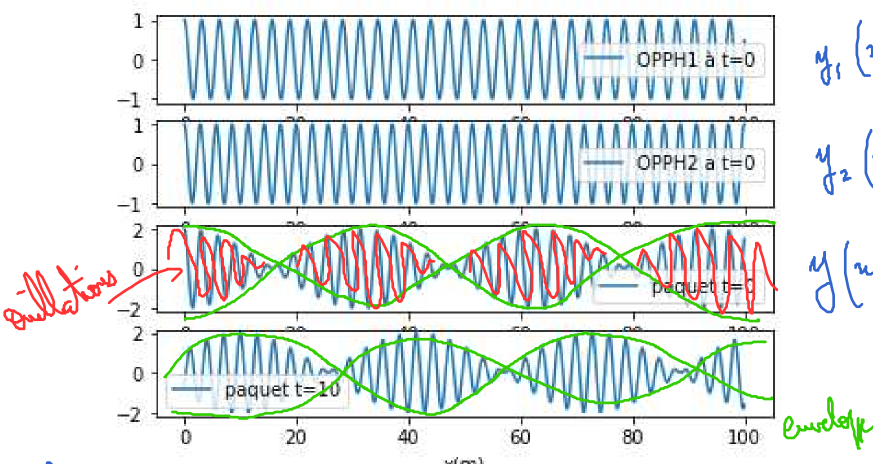
l'angle θ_p dépend de l'ordre et de la longueur d'onde : le rouge est + dévié que le bleu

L'effet d'un milieu dispersif ne peut s'observer que si l'on fait propager dans ce milieu des ondes de différentes fréquences.

2. *Notion de paquet d'ondes*

Une OPPH n'a pas de réalité physique, les sources émettent des trains d'onde, soit des ondes limitées dans le temps et dans l'espace. Un train d'onde (ou paquet d'onde) peut se modéliser par la superposition de plusieurs OPPH de fréquences différentes.

Exemple 1 : le paquet d'ondes le plus simple est composé de la superposition de deux OPPH de fréquences différentes:



$y_1(x,t) = y_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x)$

$y_2(x,t) = y_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x)$

$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$

$= \underbrace{2y_0 \cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} - \frac{k_1+k_2}{2}x\right)}_{\text{oscillations dans l'enveloppe}} \underbrace{\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2} - \frac{k_1-k_2}{2}x\right)}_{\text{enveloppe}}$

oscillations dans l'enveloppe

pulsation : $\omega_m = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$

vecteur d'onde : $k_m = \frac{k_1+k_2}{2}$

$v_\varphi = \frac{\omega_m}{k_m}$

enveloppe :

pulsation : $\omega_1 - \omega_2$

vecteur d'onde : $k_1 - k_2$

$v = \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$

les oscillations se déplacent à la vitesse de phase : $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$

l'enveloppe se déplace à la vitesse de groupe : $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

Exemple 2: le paquet d'onde gaussien:

```
def paquet(fmin,fmax,x,t):
——s,N=0,500
——c=1
——for i in range(N):
————-f0=(fmax+fmin)/2
————-Df=(fmax-fmin)
————-f=fmin+i*Df/N
————-w=2*np.pi*f
————-k=w/c
————-g=np.exp(-(f-f0)**2)
————-s=s+g*np.cos(w*t-k*x)
——return s
x=np.linspace(-1.5, 1.5,1000)
plt.plot(x,paquet(10.5,15.5,x,0))
plt.show()
```

fréquence moyenne

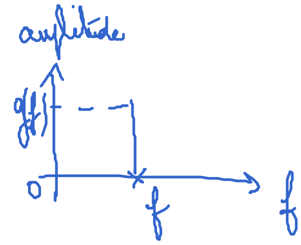
largeur spectrale

OPPH

$$s(x,t) = \sum_{f=f_{min}}^{f=f_{max}} e^{-(f-f_0)^2} \cos(\omega t - kx) \qquad \omega = 2\pi f$$

↑ on représente le paquet d'ondes à t=0

```
def spectre(fmin,fmax):
——N=500
——for i in range(N):
————-f0=(fmax+fmin)/2
————-Df=(fmax-fmin)
————-f=fmin+i*Df/N
————-g=np.exp(-(f-f0)**2)
————-plt.plot([f,f],[0,g])
————-plt.xlabel('f(Hz)')
——return plt.show()
spectre(10.5,15.5)
```

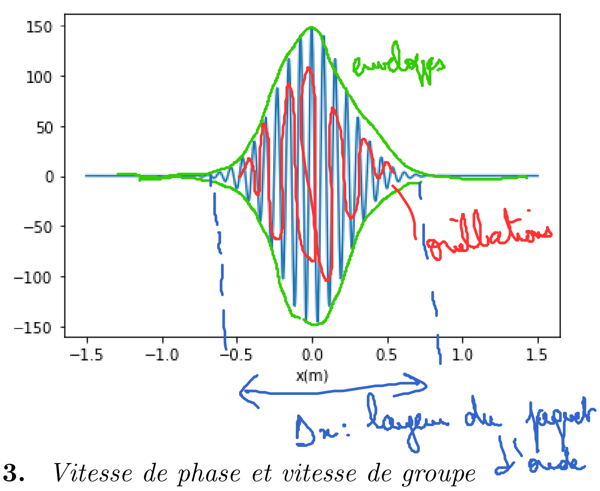


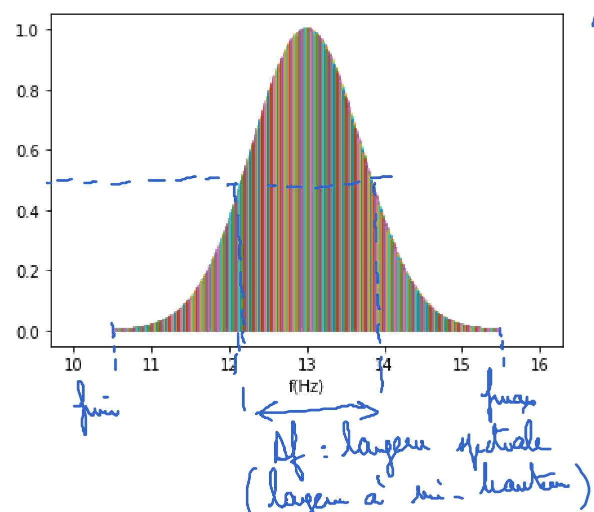
On visualise le paquet d'ondes et le spectre pour :

$\Delta x \times \Delta f = \text{cste}$

Δf petit

Δx grand





3. *Vitesse de phase et vitesse de groupe*

Un paquet d'ondes est composé d'une enveloppe et d'oscillations à l'intérieur de cette enveloppe.

On définit deux vitesses pour la propagation de ce paquet d'onde:

- La vitesse de phase : c'est la vitesse de propagation d'une OPPH de pulsation ω. On l'appelle vitesse de phase, car c'est la phase qui traduit la propagation d'une onde et cette propagation est contenue dans la partie réelle du vecteur d'onde.

La vitesse de phase est donc définie par $v_\phi = \dfrac{\omega}{\mathcal{R}e(\underline{k})}$.

Remarque 1 :une OPPH n'a pas de réalité physique car les ondes monochromatiques (une seule fréquence) n'existent pas. Donc la vitesse de phase n'est pas une vitesse matérielle, elle peut donc être supérieure à c.

Remarque 2 : pour une OPPH on a $\lambda = v_\phi T$.

- La vitesse de groupe : elle correspond à la vitesse de propagation de l'énergie soit à la vitesse de propagation de l'enveloppe du signal ou encore vitesse de propagation de l'information, c'est elle qui a une réalité matérielle et physique. Elle est donc inférieure à c.

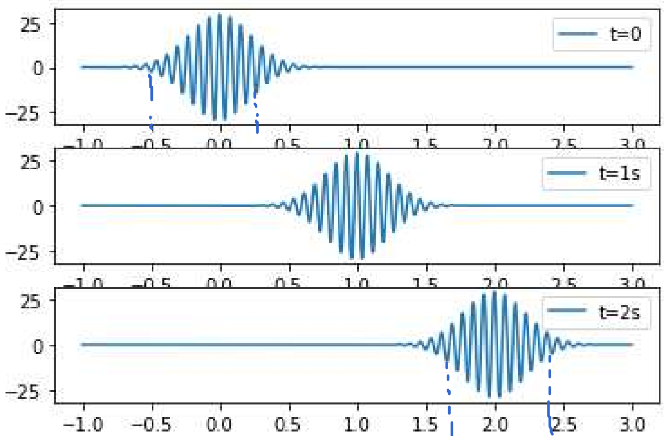
On la calcule en appliquant $v_g = \dfrac{d\omega}{dk'}$ où $k' = \mathcal{R}e(\underline{k})$.

Dans un milieu dispersif, v_ϕ et v_g sont différentes et ces vitesses dépendent de ω.

Dans un milieu non dispersif, v_ϕ et v_g sont égales et ces vitesses ne dépendent pas de ω.

4. *Propagation d'un paquet d'ondes*

Exemple de propagation dans un milieu non dispersif: le paquet d'onde gaussien avec $f_{min} = 10\ Hz$ et $f_{max} = 16\ Hz$ se propage dans un milieu où la relation de dispersion est $k = \frac{\omega}{c}$.



10λ

le paquet d'onde se propage sans se déformer

L'enveloppe parcourt la distance 2m en 2s donc $\underline{v_g = 1\ m s^{-1}}$.

La vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$

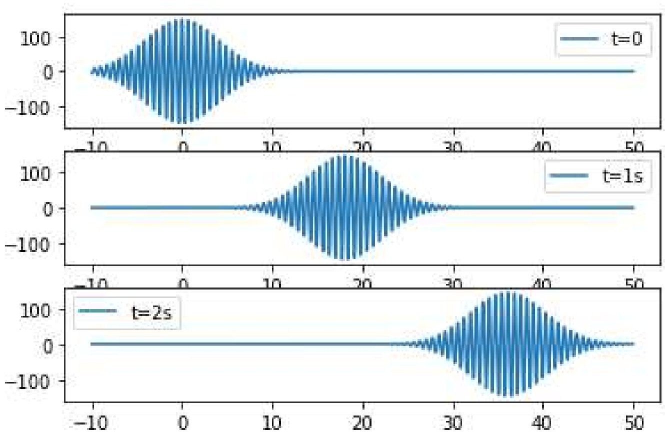
avec $\omega_{moy} = 2\pi f_{moy} = 2\pi . 13 = 81,7$ rad s^{-1}

$k_{moy} = \frac{2\pi}{\lambda_{moy}} = 83\ m^{-1}$

$\lambda_{moy} \simeq \frac{0,75}{10} = 0,075\ m$

$\underline{v_\varphi \simeq 1\ m s^{-1}}$

Exemple de propagation dans un milieu dispersif: le paquet d'onde gaussien avec $f_{min} = 10\ Hz$ et $f_{max} = 16\ Hz$ se propage dans un milieu où la relation de dispersion est $k = \sqrt{\omega}$



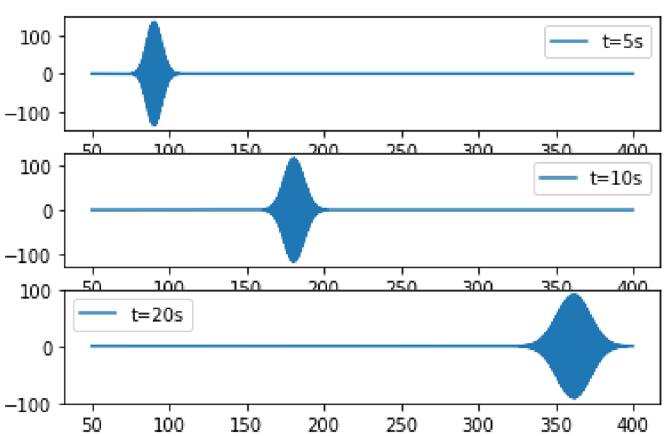
La vitesse de l'enveloppe est :

$v_g = \frac{360}{20} = 18\ m s^{-1}$

A comparer avec $\frac{d\omega}{dk} = 2k = 2\sqrt{\omega}$

$(\omega = k^2)$ ici $\omega_{moy} = 2\pi f_{moy} = 81,7$ rad s^{-1}

soit $\frac{d\omega}{dk} = 18\ m s^{-1}$



Ici $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{k}$ et $v_g = 2\sqrt{\omega}$: la théorie prévoit qu'il y a dispersion. Cela se manifeste par le fait que le paquet d'onde s'étale (les ondes de fréquences différentes ne vont pas à la même vitesse).