

DS 8 de physique

I. Transmission sans fil

L'électricité de demain pourra-t-elle se passer de fils électriques ? La nécessité actuelle de supprimer les fils et réduire l'encombrement, ou encore la multiplication des appareils électriques à faible consommation contribuent au développement des techniques et dispositifs de transmission d'énergie sans fil, inspirés des travaux pionniers de Nikola Tesla au début du XXe siècle. Les applications sont nombreuses et touchent divers domaines: de l'usage domestique (recharge d'appareils avec batteries, alimentation de petits appareils courants) au monde industriel (recharge de voitures électriques, applications diverses de la transmission de puissance, pour les trains par exemple), en passant par la médecine (apport d'énergie électrique aux implants, sans effectuer d'opérations chirurgicales lourdes). On peut citer quelques applications de la transmission d'énergie sans fil: recharge de téléphone portable, recharge sans fil d'une voiture Nissan Leaf®, pacemaker. Pour établir un couplage inductif non résonant entre une bobine émettrice et une bobine réceptrice, on peut utiliser des solénoïdes ou des bobines plates 2D



Considérons tout d'abord le cas d'un solénoïde de longueur l et d'axe de révolution Oz , comportant N spires circulaires jointives de rayon a , et parcourues par un courant d'intensité variable $i(t)$. On fait l'hypothèse d'être dans le cadre de l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS): on calcule le champ magnétique créé par des courants variables $i(t)$, comme en magnétostatique par le théorème d'Ampère.

1. Rappeler les équations locales de Maxwell relatives au champ magnétique \vec{B} . Comment se simplifient-elles dans l'ARQS?
2. Dans le cadre de l'ARQS, démontrer et énoncer le théorème d'Ampère à partir de l'équation locale concernée.

On suppose dans la suite le solénoïde infini et on cherche à exprimer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace, repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . On admet que le champ magnétique est identiquement nul à l'extérieur du solénoïde.

3. Sous quelle(s) condition(s) l'approximation d'un solénoïde infini vous semble-t-elle légitime ?
4. En invoquant des arguments de symétrie et d'invariance de la distribution de courants, déterminer la direction du champ $\vec{B}(M)$, ainsi que la (ou les) coordonnée(s) dont dépend(ent) son module.
5. En précisant le contour d'Ampère choisi, montrer tout d'abord que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde. En choisissant un second contour d'Ampère, déterminer le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde en fonction de μ_0 , l , N et $i(t)$.

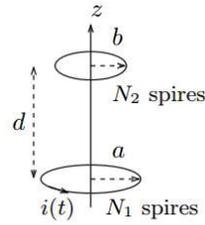
Intéressons-nous à présent au cas d'une bobine plate, constituée (pour simplifier) de N spires circulaires identiques, d'axe de révolution Oz et de rayon a , placées dans le plan $z = 0$ et parcourues par un courant d'intensité $i(t)$. On se place à nouveau dans le cadre de l'ARQS et on considère un point M de l'axe Oz , de cote $z > 0$.

6. Préciser, en justifiant votre réponse, la direction du champ magnétique $\vec{B}(M)$ au point M .
7. Que dire du plan d'équation $z = 0$ d'un point de vue des courants? Qu'en déduire d'un point de vue du champ magnétique? En déduire une relation simple entre $\vec{B}(z)$ et $\vec{B}(-z)$. On donne l'expression du champ magnétique créé par la bobine plate au point M : $B(z) = \frac{\mu_0 N i(t) a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$
8. Représenter l'allure de la fonction $B(z)$. Exprimer le champ magnétique maximal B_{max} et déterminer à quelle distance $z_{1/2}$ de la spire le champ magnétique vaut $\frac{B_{max}}{2}$, en fonction de a .

On donne en annexe les cartes de champ du solénoïde et de la bobine plate, simulées à l'aide du logiciel FEMM (Finite Element Method Magnetics).

9. Justifier les symétries et/ou antisymétries observées sur chacune de ces cartes de champ.
10. Sur la carte de champ du solénoïde, on remarque que les lignes de champ se resserrent au sein du solénoïde et qu'elles y sont approximativement parallèles. Que peut-on déduire de ces observations topologiques ? Quelle propriété, relative au flux du champ \vec{B} , permet de le confirmer ?

Modélisons à présent le transfert inductif de puissance entre deux bobines, comme celles représentées ci-contre. Une bobine émettrice plate, de résistance électrique R_1 et d'inductance propre L_1 , comportant N_1 spires circulaires de rayon a , est parcourue par un courant d'intensité: $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ imposé par un générateur non représenté.



11. Définir et exprimer la puissance instantanée reçue par la bobine émettrice de la part du générateur, notée P_{recue} , en fonction de L_1 , R_1 , $i(t)$ et de sa dérivée di/dt . En déduire que la moyenne temporelle de cette puissance est $\langle P_{recue} \rangle = \frac{R_1 I_0^2}{2}$.

Considérons également une bobine réceptrice plate, de résistance électrique R_2 , d'inductance propre L_2 et comportant N_2 spires circulaires de rayon b , située à une distance d de la bobine émettrice. On cherche à définir et exprimer le rendement de transfert de puissance entre les deux bobines, dans le cas d'un alignement parfait. On rappelle l'expression du champ magnétique créé par la bobine émettrice en un point $M(z)$ de l'axe Oz : $\vec{B} = \frac{\mu_0 N_1 i(t) a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$.

Pour simplifier, on suppose ce champ magnétique uniforme dans le plan de la bobine réceptrice.

12. Exprimer le flux ϕ du champ magnétique créé par la bobine émettrice à travers la bobine réceptrice, en fonction de $i(t)$, a , b , N_1 , N_2 et d .

13. Le courant $i(t)$ étant variable, il apparaît une force électromotrice $e(t)$ aux bornes de la bobine réceptrice. Quel phénomène est ainsi mis en évidence? Donner l'équation locale de Maxwell à l'origine de celui-ci. Après avoir nommé la loi utilisée, exprimer la fem $e(t)$ en fonction de I_0 , a , b , N_1 , N_2 , d , ω et t . On négligera le flux magnétique propre du circuit récepteur devant le flux extérieur.

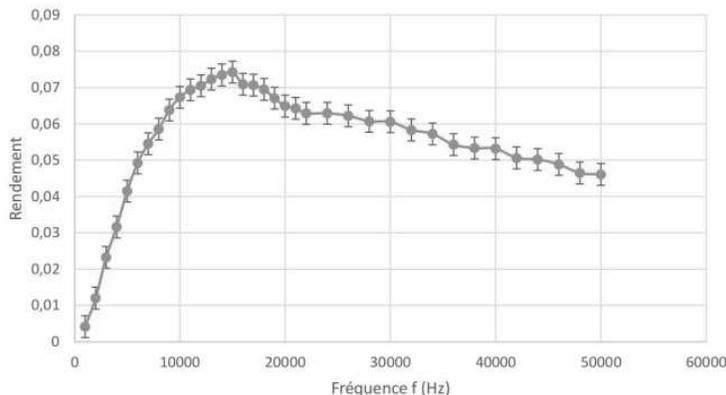
14. En négligeant l'inductance propre L_2 de la bobine réceptrice, en déduire la puissance reçue par cette dernière de la part de la bobine émettrice, notée P_{gene} , puis sa moyenne temporelle $\langle P_{gene} \rangle$ en fonction de I_0 , a , b , N_1 , N_2 , d , ω et R_2 .

On définit le rendement de transmission de puissance par le quotient: $\eta = \frac{\langle P_{gene} \rangle}{\langle P_{recue} \rangle}$.

Montrer que le rendement peut se mettre sous la forme $\eta = k \frac{\mu_0^2 N_1^2 N_2^2 a^4 b^4 \omega^2}{R_1 R_2 (d^2 + a^2)^3}$

avec k un coefficient sans dimension à expliciter. Ce résultat constitue la loi de Yates.

Un générateur basse fréquence (GBF), délivrant un signal sinusoïdal de fréquence f alimente un circuit composé d'une bobine émettrice d'inductance $L = 0,86 \text{ mH}$, dite bobine primaire, et d'une résistance. Un amplificateur de courant permet d'augmenter la puissance fournie à la bobine émettrice. On place à une distance d de la bobine émettrice une bobine réceptrice *identique*, dite bobine secondaire, mise en série avec une résistance. Deux oscilloscopes permettent de mesurer les puissances moyennes reçues par les bobines émettrice et réceptrice. Les bobines étant accolées, on étudie tout d'abord la variation du rendement η avec la fréquence f imposée par le GBF, tous les autres paramètres demeurant constants.



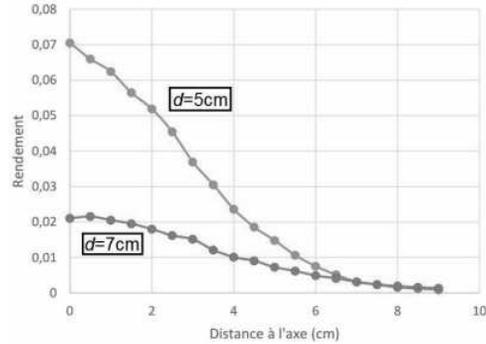
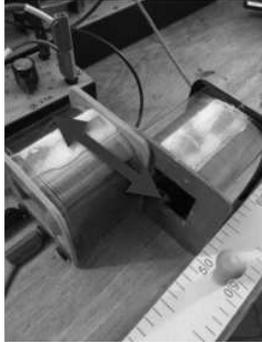
15. Estimer le rendement expérimental maximal η_{max} , ainsi que la fréquence f_{max} à laquelle celui-ci est atteint. Quel comportement en fréquence pouvait-on prévoir par la loi théorique de Yates? Ce comportement

est-il vérifié expérimentalement?

En réalité, chaque bobine souffre d'effets capacitifs associés aux différents matériaux isolants séparant les spires. On propose de déterminer un ordre de grandeur de cette capacité parasite C_p .

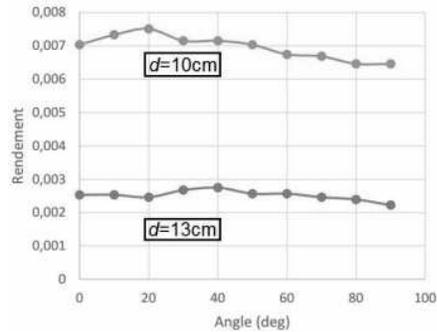
16. Rappeler l'expression de la pulsation propre ω_0 d'un oscillateur électronique LC en fonction de L et C . En supposant que le rendement soit maximal pour la pulsation ω_0 , en déduire la valeur de C_p .

On cherche ensuite à sonder expérimentalement l'influence d'un désalignement des bobines sur le rendement. Les résultats sont présentés ci-dessous, chaque série de mesures est effectuée à écartement longitudinal entre bobines d fixé.



17. Interpréter l'évolution observée. Justifier qualitativement que l'effondrement du rendement soit plus important lorsque d est petit.

On sonde enfin l'influence de l'orientation relative des bobines sur le rendement. Les résultats sont reportés ci-dessous.



18. Commenter les résultats obtenus. Proposer une justification qualitative, en lien avec les cartes de champ d'une bobine, permettant de comprendre la différence avec les résultats obtenus à la question précédente.

II. Dimensionnement d'un câble électrique

On s'intéresse à la dimension des câbles employés pour transporter l'énergie électrique des centrales au consommateur. On cherche à justifier le rayon R_c des câbles utilisés en début du réseau basse tension.

Pour cela, on adopte le modèle de Drude: un électron libre de charge $-e$ est soumis à la force qu'exerce un champ électromagnétique (\vec{E} , \vec{B}) et à une force de frottement visqueux, modélisant les collisions, de la forme $\vec{f} = -\frac{m_e}{\tau} \vec{v}$ où \vec{v} est la vitesse des électrons, τ un temps de relaxation et m_e la masse d'un électron.

Un fil infini d'axe Oz et de rayon R_c est parcouru par un vecteur densité de courant \vec{j}_c . Le milieu, supposé électriquement neutre, contient n_0 électrons mobiles par unité de volume. Il est suffisamment dilué pour pouvoir négliger les interactions entre les différentes charges du milieu.

Le mouvement d'un électron du milieu conducteur est non relativiste et il est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

1. Ecrire les quatre équations de Maxwell en donnant leur nom dans ce milieu électriquement neutre dans lequel la densité volumique de charges est nulle.

2. Dans le modèle présenté ci-dessus, appliquer la deuxième loi de Newton à un électron du milieu et donner l'équation différentielle vérifiée par sa vitesse \vec{v} . Faut-il prendre en compte le poids de l'électron ? Justifier. Données: $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$, $m_e = 9,1.10^{-31} \text{ kg}$ et $e = 1,6.10^{-19} \text{ C}$.

3. Dans ce milieu, on admet que $\|\vec{E}\| = \|\vec{B}\|c$ où c est la vitesse de la lumière. Justifier que la force magnétique subie par un électron est négligeable devant la force électrique. Simplifier alors l'équation du mouvement d'un électron.

On se place en régime permanent sinusoïdal et on note \vec{v} la vitesse de l'électron et \vec{j}_c le vecteur densité de courant dans ce régime. Le champ électrique est de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j\omega t}$.

4. Exprimer \vec{v} en fonction de e , \vec{E} , τ , m_e et ω . En déduire l'expression du vecteur densité de courant \vec{j}_c en fonction des mêmes variables et de n_0 .

5. Rappeler l'expression de la loi d'Ohm locale en fonction de \vec{j}_c , \vec{E} et de la conductivité γ . En déduire que la conductivité complexe $\underline{\gamma}$ en régime permanent sinusoïdal s'exprime: $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + j\omega\tau}$

Donner l'expression de γ_0 en fonction de n_0 , e , τ et m_e .

Un milieu conducteur tel que le câble étudié est caractérisé par un temps de relaxation de l'ordre de $\tau \approx 10^{-14} \text{ s}$ et une densité de porteurs de charge de l'ordre de $n_0 \approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$. Calculer γ_0 .

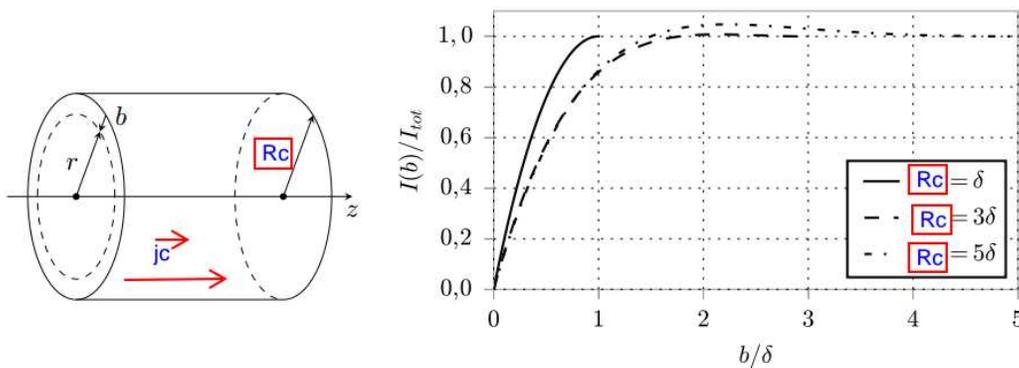
6. On rappelle que la fréquence du signal considéré est $f = 50 \text{ Hz}$. Donner un ordre de grandeur de $\omega\tau$ et simplifier l'expression de $\underline{\gamma}$.

7. Evaluer un ordre de grandeur du courant de déplacement divisé par le courant de conduction et simplifier l'équation de Maxwell-Ampère. Donnée: $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

8. On donne $\text{rot}(\text{rot}\vec{E}) = \text{grad}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$. Déduire des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm que \vec{j}_c vérifie l'équation: $\Delta\vec{j}_c - \mu_0\gamma_0\frac{\partial\vec{j}_c}{\partial t} = \vec{0}$

Quel nom porte le phénomène lié à une telle équation différentielle? Déduire d'une analyse dimensionnelle que la distance sur laquelle la densité de courant varie s'écrit $\delta = \sqrt{\frac{1}{\mu_0\gamma_0 f}}$. Calculer δ . Données: $\mu_0 = 4\pi.10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ et $f = 50 \text{ Hz}$.

9. La résolution de cette équation n'est pas demandée. On définit l'intensité $I(b)$ circulant dans l'épaisseur b la plus externe du câble par $I(b) = |\int_{R_c-b}^{R_c} 2\pi j_c(r)rdr|$ et I_{tot} l'intensité totale dans le conducteur par $I_{tot} = |\int_0^{R_c} 2\pi j_c(r)rdr|$.

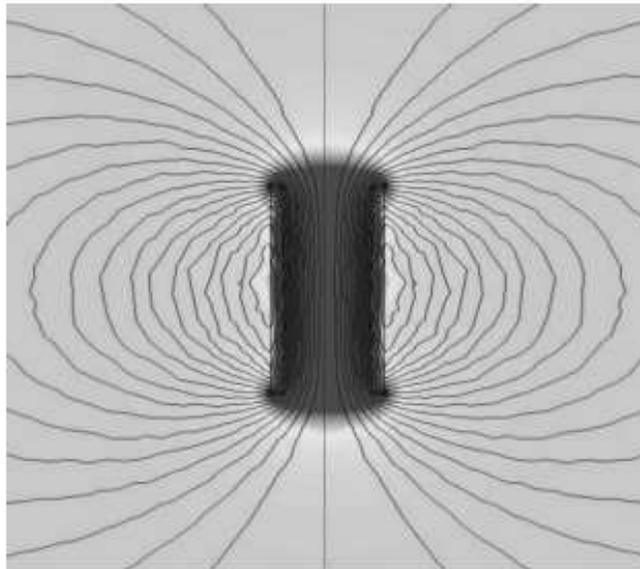


En étudiant les courbes représentatives de $I(b)/I_{tot}$ pour différents rayons de câble $R_c = \delta$, $R_c = 3\delta$ et $R_c = 5\delta$, quelle est la zone du câble la plus sollicitée pour transporter le courant? Est-il utile de fabriquer des câbles dont le rayon vaut plusieurs fois δ ? Justifier.

NOM:

Annexe:

Carte de champ du solénoïde:



Carte de champ de la bobine plate:

