Correction DS8

I. **Transmission sans fil**

1. Equation de Maxwell Thomson: $\text{div}\overrightarrow{B} = 0$

Equation de Maxwell Ampère: $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} + \mu_0\epsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$.

Dans l'ARQS, on néglige le courant de déplacement $\epsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ devant le courant de conduction $\overrightarrow{j}$ soit $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j}$.

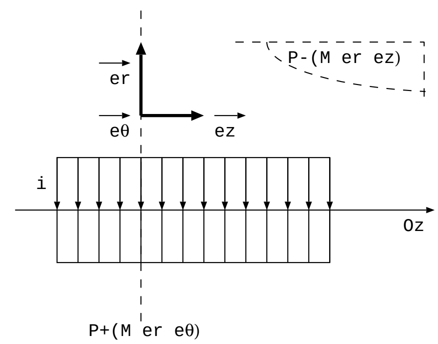
2. On écrit le théorème de Stokes: $\oint \overrightarrow{B}(M,t)d\overrightarrow{OM} = \iint \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B}(P,t)dS(P)\overrightarrow{n}(P) = \mu_0 \iint \overrightarrow{j}\, dS(P)\overrightarrow{n}(P) = \mu_0 I_{enlaces}$.

C'est le théorème d'Ampère selon lequel la circulation du champ magnétique sur un contour fermé et orienté est égal à μ_0 fois les courants enlacés par ce contour.

3. Le solénoide peut être considéré infini pour $l >> a$.

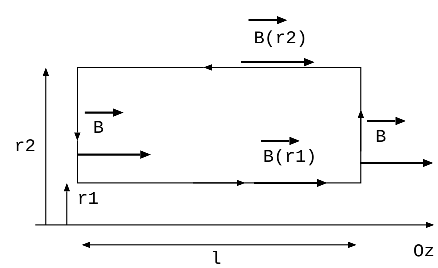
4. Il y a invariance par rotation autour de Oz et par translation selon Oz donc B ne dépend que de r.

M appartient aux plans $P^+(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ et $P^-(M, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_z})$ donc $\overrightarrow{B}(M)$ est perpendiculaire à P^+ et appartient à P^- soit $\overrightarrow{B}$ est selon $\overrightarrow{e_z}$.



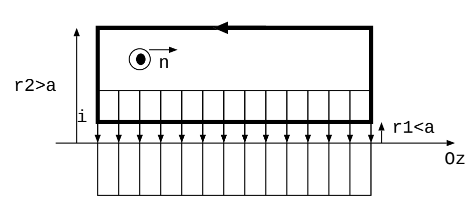
On a donc $\overrightarrow{B}(M) = B(r)\overrightarrow{e_z}$. Les lignes de champ magnétique sont des droites parallèles à Oz.

5. On prend un contour d'Ampère rectangulaire, le plan du rectangle contient l'axe Oz. La circulation de $\overrightarrow{B}$ sur ce contour s'écrit: $\mathcal{C} = \oint \overrightarrow{B}(M)d\overrightarrow{OM} = B(r_1)l - B(r_2)l$.



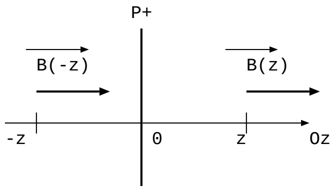
Lorsque l'on met ce contour dans le solénoide ($r_1 < r_2 < a$) il n'y a pas de courants enlacés donc $\mathcal{C} = 0$ soit $B(r_1) = B(r_2)$: le champ magnétique dans le solénoide est nul.

Lorsque l'on met ce contour à cheval sur le solénoide ($r_1 < a < r_2$) on a $\mathcal{C} = \mu_0 N i = B(r_1)l - B(r_2)l$ avec $B(r_2) = 0$ (à l'extérieur) et $B(r_1)$ est le champ intérieur donc $\overrightarrow{B} = \mu_0 \dfrac{N}{l} i\overrightarrow{e_z}$.



6. Tout plan passant par Oz est plan P^- donc $\overrightarrow{B}(M)$ appartient à tous ces plans soit $\overrightarrow{B}(M)$ est selon Oz.

7. Le plan $z = 0$ est un plan P^+ pour les courants donc en deux points symétriques par rapport à ce plan, les champs magnétiques sont antisymétriques, d'après le schéma on a $\overrightarrow{B}(-z) = +\overrightarrow{B(z)}$.

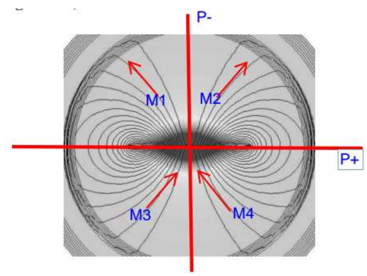


8. B est maximal au centre de la bobine et est nulle lorsqu'on est loin de la bobine soit $B_{max} = \dfrac{\mu_0 N i(t)}{2a}\overrightarrow{e_z}$.

On résout $B(z) = \dfrac{\mu_0 N i(t) a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}} = \dfrac{\mu_0 N i(t)}{4a}$ soit $2a^3 = (a^2+z^2)^{3/2}$ ou encore $2^{2/3}a^2 = a^2 + z^2$ et $z^2 = a^2(2^{2/3}-1)$ ou encore $z = \pm a\sqrt{2^{2/3}-1} = 0,77a$.

9. M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à un plan P^- donc leurs champs magnétiques sont symétriques par rapport à ce plan.

M_1 et M_3 sont symétriques par rapport à un plan P^+ donc leurs champs magnétiques sont antisymétriques par rapport à ce plan.



10. Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est nul, on dit que $\overrightarrow{B}$ est à flux conservatif, ce qui a pour conséquence que lorsque les lignes de champ s'écartent la norme de $\overrightarrow{B}$ diminue et lorsque les lignes de champ se resserrent, la norme de $\overrightarrow{B}$ augmente. C'est une conséquence de l'équation de Maxwell-Thomson. A l'intérieur du solénoide, les lignes de champ sont parallèles, le champ y est uniforme. Elles sont plus serrées, le champ est plus intense dans le solénoide.

11. La bobine est modélisée par une association série inductance-résistance. La puissance reçue est le produit $u.i$ dans la bobine en convention récepteur soit avec $u = R_1 i + L_1\dfrac{di}{dt}$. On a donc pour la puissance reçue $P_{recue} = R_1 i^2 + L_1 i\dfrac{di}{dt} = R_1 I_0^2\cos^2(\omega t) - L_1 I_0^2\omega\cos(\omega t)\sin(\omega t)$. En valeur moyenne on a $<\cos^2(\omega t)>= \dfrac{1}{2}$ et $<\cos(\omega t)\sin(\omega t)>= 0$ d'où la puissance moyenne reçue par la bobine émettrice $P_{recue} = R_1\dfrac{I_0^2}{2}$.

12. Je choisis d'orienter la bobine 2 par le vecteur $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{e_z}$, le flux magnétique s'écrit $\phi = N_2\displaystyle\iint B(M)\overrightarrow{e_z}dS(M)\overrightarrow{e_z}$ avec $B(M) = B(z=d) = \dfrac{\mu_0 N_1 i(t) a^2}{2(a^2+d^2)^{3/2}}$ uniforme dans la bobine (c'est l'hypothèse de l'énoncé) on a donc $\phi = B(d)\pi b^2 = \dfrac{\mu_0 N_2 N_1 i(t) a^2\pi b^2}{2(a^2+d^2)^{3/2}}$.

13. On applique la loi de Faraday $e(t) = -\dfrac{d\phi}{dt} = \dfrac{\mu_0 N_2 N_1 di/dt a^2\pi b^2}{2(a^2+d^2)^{3/2}} = \dfrac{\mu_0 N_2 N_1 I_0\omega\sin(\omega t) a^2\pi b^2}{2(a^2+d^2)^{3/2}}$. La loi de Faraday vient de l'équation locale de Maxwell Faraday $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$, c'est la loi de l'induction, qui dit qu'un champ électrique peut être créé par des champs magnétiques variables.

14. La bobine réceptrice se comporte comme un générateur de fem $e(t)$, le circuit équivalent de la bobine émettrice comporte la fem en série avec la résistance R_2 (on néglige le phénomène d'auto-induction). La puissance reçue est $P_{gene} = R_2 i_2^2$ avec d'après la loi des mailles $e = R_2 i_2$ soit $P_{gene} = \dfrac{e(t)^2}{R_2} = \dfrac{\mu_0^2 N_2^2 N_1^2 I_0^2\omega^2\sin^2(\omega t) a^4\pi^2 b^4}{4(a^2+d^2)^3 R_2}$ soit en valeur moyenne par rapport au temps $< P_{gene} >= \dfrac{\mu_0^2 N_2^2 N_1^2 I_0^2\omega^2 a^4\pi^2 b^4}{8(a^2+d^2)^3 R_2}$.

On en déduit le rendement $\eta = \dfrac{\mu_0^2 N_2^2 N_1^2\omega^2 a^4\pi^2 b^4}{4(a^2+d^2)^3 R_2 R_1}$ soit en identifiant avec l'énoncé $k = \dfrac{\pi^2}{4}$.

15. On lit $f_{max} = 15\ kHz$ et $\eta_{max} \approx 0,073$.

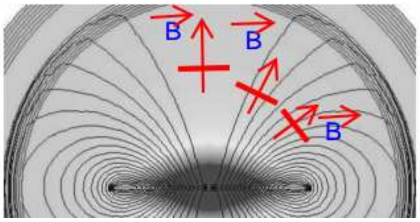
La loi de Yates prévoit que le rendement est proportionnel au carré de la fréquence puisque $\omega = 2\pi f$. Aussi à BF la courbe expérimentale montre que le rendement est proportionnel à la fréquence et à HF le rendement diminue, ce n'est pas du tout en accord avec la loi de Yates.

16. La pulsation propre du circuit RLC série est $\omega_0 = \frac{1}{LC}$. On applique donc ici $\omega_{max} = 2\pi f_{max} = \frac{1}{LC_p}$ soit $C_p = \frac{1}{4\pi^2 L f_{max}^2} = 10,13\ \mu F$.

17. Pour un distance d donnée, plus on désaligne les bobines et plus le rendement est faible. C'est tout à fait cohérent avec le fait que le champ magnétique est maximal sur l'axe de la bobine (c'est là où les lignes de champ sont le plus serrées), lorsqu'on s'éloigne de l'axe les lignes de champ magnétiques s'écartent, le champ magnétique diminue et donc le flux du champ magnétique créé par la bobine émettrice, à travers la bobine réceptrice diminue, le rendement du couplage est moins bon.

On observe aussi que le rendement est plus élevé lorsque les bobines sont plus proches l'une de l'autre (d petit), en effet le champ magnétique créé par la bobine émettrice est maximal au centre de la bobine, il diminue quand on s'éloigne de la bobine, donc le flux et le rendement diminuent également.

18. On observe là aussi que le rendement est de plus en plus faible lorsqu'on éloigne les bobines l'une de l'autre. En revanche, lorsqu'on incline la bobine le rendement est inchangé. Les lignes de champ s'inclinent aussi sur les côtés de la bobine, elles restent à peu près à la même distance les unes des autres, donc la norme de B est inchangé et elles sont perpendiculaires à la surface de la bobine donc le flux ne varie pas.



II. **Dimensionnement d'un câble électrique**

1. Equation de maxwell Gauss $\text{div}\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} = 0$, Equation de maxwell Thomson $\text{div}\overrightarrow{B} = 0$, Equation de Maxwell Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ et équation de Maxwell Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j_c} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$

2. L'électron subit son poids, la force électrique $\overrightarrow{F_e} = -e\overrightarrow{E}$, la force magnétique $\overrightarrow{F_m} = -e\overrightarrow{v}\Lambda\overrightarrow{B}$ et la force de frottements $\overrightarrow{f} = -\dfrac{m_e}{\tau}\overrightarrow{v}$.

Le rapport du poids et de la force électrique s'écrit: $\dfrac{m_e g}{eE} = \dfrac{10^{-10}}{E} << 1$ sachant que les champs électriques sont de l'ordre de 10^3 $V.m^{-1}$. On peut donc négliger le poids devant la force électrique.

La RFD appliquée à un électron s'écrit: $m_e \dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -e\overrightarrow{E} - e\overrightarrow{v}\Lambda\overrightarrow{B} - \dfrac{m_e}{\tau}\overrightarrow{v}$.

3. On cherche un ordre de grandeur du rapport de la force magnétique sur la force électrique soit: $\dfrac{F_m}{F_e} \approx \dfrac{evB}{eE} \approx \dfrac{v}{c} << 1$ car l'électron n'est pas relativiste donc sa vitesse v est négligeable devant la vitesse de la lumière.

La RFD appliquée à l'électron s'écrit: $m_e \dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -e\overrightarrow{E} - \dfrac{m_e}{\tau}\overrightarrow{v}$.

4. En notation complexe $\dfrac{d}{dt} = j\omega$. La RFD devient:

$j\omega m_e \underline{\overrightarrow{v}} = -e\underline{\overrightarrow{E}} - \dfrac{m_e}{\tau}\underline{\overrightarrow{v}}$ soit $\underline{\overrightarrow{v}} = \dfrac{\frac{-e\tau}{m_e}}{1+j\omega\tau}\underline{\overrightarrow{E}}$.

On en déduit le vecteur densité de courant par $\underline{\overrightarrow{j}_c} = n_0(-e)\underline{\overrightarrow{v}} = \dfrac{\frac{n_0 e^2 \tau}{m_e}}{1+j\omega\tau}\underline{\overrightarrow{E}}$ de la forme $\underline{\overrightarrow{j}_c} = \underline{\gamma}\underline{\overrightarrow{E}}$. On a donc $\underline{\gamma} = \dfrac{\frac{n_0 e^2 \tau}{m_e}}{1+j\omega\tau}$ soit par identification avec l'énoncé $\gamma_0 = \dfrac{n_0 e^2 \tau}{m_e}$. AN: $\gamma_0 = 10^8$ $S.m^{-1}$.

5. $\omega\tau = 2\pi f \tau \approx 3.10^{-12} << 1$, on peut donc négliger $\omega\tau$ devant 1 au dénominateur de $\underline{\gamma}$ soit $\underline{\gamma} = \gamma_0$.

6. Le courant de déplacement est $\epsilon_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ soit en ordre de grandeur $\dfrac{\epsilon_0 E}{T} = \epsilon_0 f E$.

Le courant de conduction est $\overrightarrow{j_c} = \gamma_0 E$.

Ainsi le rapport du courant de déplacement sur le courant de conduction s'écrit $\dfrac{\epsilon_0 f E}{\gamma_0 E} = \dfrac{\epsilon_0 f}{\gamma_0} \approx 10^{-18} << 1$, on peut donc négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction, l'équation de Maxwell Ampère s'écrit $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j_c}$.

7. $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\overrightarrow{E}) - \Delta\overrightarrow{E}$ avec $\overrightarrow{j_c} = \gamma_0 \overrightarrow{E}$

Soit en utilisant Maxwell gauss et Maxwell Faraday:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B}) = -\Delta\overrightarrow{E}$$

Soit en utilisant la loi d'ohm et Maxwell Ampère:

$$-\mu_0 \frac{\partial \overrightarrow{j_c}}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma_0}\Delta\overrightarrow{j_c}$$

d'où $\Delta\overrightarrow{j_c} - \mu_0\gamma_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{j_c}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$

C'est une équation de diffusion. Par analyse dimensionnelle on a $\dfrac{j_c}{\delta^2} = \mu_0\gamma_0 \dfrac{j_c}{T} = \mu_0\gamma_0 j_c f$ soit $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\gamma_0 f}} \approx 1$ cm.

8. Pour $b > \delta$, on a $I(b)/I_{tot} \approx 1$, ce qui signifie que la totalité du courant passe par la petite épaisseur b sur le bord du câble. Le rayon optima du câble est $R_c \approx \delta$ pour que tout le volume du câble serve à transporter le courant.