TD ondes électromagnétiques dans le vide

I. Expressions du champ em d'une onde

1. Cette onde est une OPPH qui se propage selon $-Oz$. On déduit $\overrightarrow{B}$ de la relation de structure $\overrightarrow{B} = \dfrac{-\overrightarrow{e_z}\Lambda\overrightarrow{E}}{c} = -\dfrac{E_0}{c}\cos(\omega t + kz)\overrightarrow{e_y}$.

On en déduit le vecteur de Poynting $\overrightarrow{R} = \dfrac{\overrightarrow{E}\Lambda\overrightarrow{B}}{\mu_0} = -\dfrac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t + kz)\overrightarrow{e_z}$: le vecteur de Poynting est bien dans la direction et le sens de propagation de l'onde.

2. L'onde donnée par $\overrightarrow{E} = E_0\cos(\omega t)\cos(kx)\overrightarrow{e_z}$ est une OS car les variables x et t ne sont pas dans le même terme. On a $\overrightarrow{E} = \dfrac{E_0}{2}(\cos(\omega t + kx) + \cos(\omega t - kx))\overrightarrow{e_z}$.

Le terme $\overrightarrow{E_1} = \dfrac{E_0}{2}(\cos(\omega t + kx)\overrightarrow{e_z}$ est une OPPH qui se propage selon $-Ox$, le champ magnétique associé est $\overrightarrow{B_1} = \dfrac{-\overrightarrow{e_x}\Lambda\overrightarrow{E_1}}{c} = \dfrac{E_0}{2c}(\cos(\omega t + kx)\overrightarrow{e_y}$.

Le terme $\overrightarrow{E_2} = \dfrac{E_0}{2}(\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{e_z}$ est une OPPH qui se propage selon $+Ox$, le champ magnétique associé est $\overrightarrow{B_2} = \dfrac{\overrightarrow{e_x}\Lambda\overrightarrow{E_1}}{c} = -\dfrac{E_0}{2c}(\cos(\omega t - kx)\overrightarrow{e_y}$.

Le champ magnétique de cette onde s'écrit $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B_1} + \overrightarrow{B_2} = \dfrac{E_0}{2c}(\cos(\omega t + kx) - \cos(\omega t - kx))\overrightarrow{e_y} = -2\dfrac{E_0}{2c}\sin(\omega t)\sin(2kx)\overrightarrow{e_y}$.

On peut retrouver ce résultat en appliquant l'équation de Maxwell Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$. Soit $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E} = \dfrac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{e_x}\Lambda E_0\cos(\omega t)\cos(kx)\overrightarrow{e_z} = +kE_0\cos(\omega t)\sin(kx)\overrightarrow{e_y}$ d'où $\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} = -kE_0\cos(\omega t)\sin(kx)\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{B} = -\dfrac{kE_0}{\omega}\sin(\omega t)\sin(kx)\overrightarrow{e_y}$ avec $\dfrac{k}{\omega} = \dfrac{1}{c}$.

3. C'est une OS car les variables t et x ne sont pas dans le même terme.

On trouve le champ électrique en appliquant Maxwell Ampère: $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$. Soit $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B} = \dfrac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{e_x}\Lambda B_0\sin(\omega t)\cos(\dfrac{\pi x}{a})\overrightarrow{e_y} = -\dfrac{\pi B_0}{a}\sin(\omega t)\sin(\dfrac{\pi x}{a})\overrightarrow{e_z}$. Soit $\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} = -\dfrac{\pi B_0 c^2}{a}\sin(\omega t)\sin(\dfrac{\pi x}{a})\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{E} = \dfrac{\pi B_0 c^2}{a\omega}\cos(\omega t)\sin(\dfrac{\pi x}{a})\overrightarrow{e_z}$.
La valeur moyenne du vecteur de Poynting est nulle, en effet pour une OS, l'énergie ne se propage pas.

II. Onde émise par un laser

1. Le sujet permet de calculer l'intensité lumineuse $I = \dfrac{P}{\pi(d/2)^2} = 1,27.10^6\ W.m^{-2}$. Cette grandeur correspond à la valeur moyenne du vecteur de Poynting.

2. Pour l'OPPH on propose $\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{e_y}\cos(\omega t - kz)$ (OPPH se propageant selon Oz, polarisée selon Oy). On déduit le champ magnétique de la relation de structure $\overrightarrow{B} = \dfrac{\overrightarrow{e_z}\Lambda\overrightarrow{E}}{c} = -\dfrac{E_0}{c}\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_x}$. D'où le vecteur de Poynting $\overrightarrow{R} = \dfrac{\overrightarrow{E}\Lambda\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \dfrac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)\overrightarrow{e_z} = \epsilon_0 c E_0^2\cos^2(\omega t - kz)\overrightarrow{e_z}$ et en valeur moyenne: $< \overrightarrow{R} >= \dfrac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}\overrightarrow{e_z}$: le vecteur de Poynting est bien dans le sens et la direction de propagation de l'onde.

3. On a donc $I = || < \overrightarrow{R} > || = \dfrac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}$ soit $E_0 = \sqrt{\dfrac{2I}{\epsilon_0 c}} = 9,8.10^3\ kV.m^{-1}$ et $B_0 = \frac{E_0}{c} = 33\ \mu T$.

III. **Onde sphérique**

1. La phase est de la forme $\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM}$, par identification avec l'énoncé on a $\overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM} = kr$ soit $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{e_r}$. La relation de dispersion est $k = \dfrac{\omega}{c}$.

2. On utilise la relation de structure des OPP $\overrightarrow{B} = \dfrac{\overrightarrow{k}\Lambda\overrightarrow{E}}{\omega} = \dfrac{\overrightarrow{e_r}\Lambda\overrightarrow{E}}{c} = \dfrac{E_0(r)}{c}\cos(\omega t - kr)\overrightarrow{e_\phi}$.

3. Le vecteur de Poynting s'écrit $\overrightarrow{R} = \dfrac{\overrightarrow{E}\Lambda\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \dfrac{E_0^2(r)}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kr)\overrightarrow{e_r}$. Le vecteur de Poynting est dans le sens et la direction de propagation de l'onde.

Sa valeur moyenne temporelle est $< \overrightarrow{R} >= \dfrac{E_0^2(r)}{2\mu_0 c}\overrightarrow{e_r}$.

4. La puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de rayon r est le flux de la valeur moyenne du vecteur de Poynting à travers la sphère de rayon r soit: $P = \iint < \overrightarrow{R} > .dS\overrightarrow{n} = \iint \dfrac{E_0^2(r)}{2\mu_0 c}\overrightarrow{e_r}dS\overrightarrow{e_r} = \dfrac{E_0^2(r)}{2\mu_0 c}\iint dS = \dfrac{E_0^2(r)2\pi r^2}{\mu_0 c}$.
L'émetteur émet une onde sphérique qui se propage. Au cours de la propagation la puissance est conservée car il n'y a pas d'absorption, cette puissance se répartit sur les surfaces d'onde qui sont les sphères de centre O. Ainsi la puissance moyenne P rayonnée à travers une sphère de rayon r ne doit pas dépendre de r.

On a donc $P = \dfrac{E_0^2(r)2\pi r^2}{\mu_0 c}$ = constante soit $E_0^2(r)r^2 = \dfrac{P\mu_0 c}{2\pi}$ est une constante donc $E_0(r) = \sqrt{\dfrac{P\mu_0 c}{2\pi}}\dfrac{1}{r} = \sqrt{\dfrac{P}{2\pi\epsilon_0 c}}\dfrac{1}{r}$.

IV. **Four micro onde**

1. L'onde est stationnaire car la variable temps et les variables d'espace ne sont pas dans le même terme. L'onde est polarisée rectilignement selon Oz.

On doit avoir $E(x = 0) = E(x = a) = 0$ soit $\sin(n\pi) = 0$ qui impose que n est un nombre entier.

On doit avoir aussi $E(y = 0) = E(y = b) = 0$ soit $\sin(m\pi) = 0$ qui impose que m est un nombre entier.

2. On a l'équation de propagation du champ électrique $\Delta\overrightarrow{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$.

ici $\Delta\overrightarrow{E} = \dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial c^2} + \dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial y^2} = -(\dfrac{n\pi}{a})^2\overrightarrow{E} - (\dfrac{m\pi}{b})^2\overrightarrow{E}$

et $\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = -\omega^2\overrightarrow{E}$

On a donc la relation de dispersion: $-(\dfrac{n\pi}{a})^2\overrightarrow{E} - (\dfrac{m\pi}{b})^2\overrightarrow{E} + \dfrac{\omega^2}{c^2}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$ soit $\dfrac{\omega^2}{c^2} = (\dfrac{n\pi}{a})^2 + (\dfrac{m\pi}{b})^2$.

3. Les zones où le chocolat a fondu sont les zones où on trouve un ventre de l'onde stationnaire. Selon Ox on observe 3 ventres donc 3 fuseaux, on a $n = 3$ et selon Oy on observe deux ventres donc 2 fuseaux, on a $m = 2$ donc $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = c\sqrt{(\dfrac{n}{2a})^2 + (\dfrac{m}{2b})^2} = 1,8\ GHz$.

V. **Réflexion sur un métal parfait**

1. Dans le vide le champ électrique est la superposition du champ de l'onde incidente et de l'onde réfléchie: $\overrightarrow{E} = (E_0\cos(\omega t - kz) + E_0'\cos(\omega t + kz))\overrightarrow{e_x}$.

On reconnaît dans cette expression l'onde incidente $\overrightarrow{E_i} = E_0\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_x}$ qui se propage selon $+Oz$. On en déduit le champ magnétique pour cette OPPH: $\overrightarrow{B_i} = \dfrac{\overrightarrow{e_z}\Lambda\overrightarrow{E_i}}{c} = \dfrac{E_0}{c}\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{e_y}$.

On reconnaît dans cette expression l'onde réfléchie $\overrightarrow{E_r} = E_0'\cos(\omega t + kz)\overrightarrow{e_x}$ qui se propage selon $-Oz$. On en déduit le champ magnétique pour cette OPPH: $\overrightarrow{B_r} = \dfrac{-\overrightarrow{e_z}\Lambda\overrightarrow{E_r}}{c} = -\dfrac{E_0'}{c}\cos(\omega t + kz)\overrightarrow{e_y}$.

Le champ magnétique dans le vide s'écrit donc $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B_i} + \overrightarrow{B_r} = (\frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kz) - \frac{E'_0}{c}\cos(\omega t + kz)\overrightarrow{e_y}$.

2. On écrit que le champ électrique est continue à la surface du dioptre vide-métal soit $\overrightarrow{E}(z = 0^-) = \overrightarrow{E}(z = 0^+) = \overrightarrow{0}$ car dans le métal le champ em est nul. On a donc $\overrightarrow{E}(z = 0^-) = (E_0\cos(\omega t) + E'_0\cos(\omega t))\overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{0}$ soit $E'_0 = E_0$ et $r = -1$ qui désigne le coefficient de réflexion de l'onde (amplitude de l'onde réfléchie sur l'amplitude de l'onde incidente).

3. On reprend les expressions des champs em avec $E'_0 = -E_0$ soit $\overrightarrow{E} = E_0(\cos(\omega t - kz) - \cos(\omega t + kz))\overrightarrow{e_x} = 2E_0\sin(\omega t)\sin(kz)\overrightarrow{e_x}$.

De même pour le champ magnétique $\overrightarrow{B} = \frac{E_0}{c}(\cos(\omega t - kz) - + \cos(\omega t + kz))\overrightarrow{e_y} = \frac{2E_0}{c}\cos(\omega t)\cos(kz)\overrightarrow{e_y}$.

Il s'agit d'ondes stationnaires car t et z ne sont pas dans le même terme.

On a $\overrightarrow{B}(z = 0^-) = \frac{2E_0}{c}\cos(\omega t)\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{B}(z = 0^+) = \overrightarrow{0}$ car le champ est nul dans le métal parfait. Donc le champ magnétique n'est pas continu.

4. Ici le milieu 2 est le vide, le milieu 1 est le métal parfait, on a $\overrightarrow{B_1}(z = 0^+) = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{B_2}(z = 0^-) = \frac{2E_0}{c}\cos(\omega t)\overrightarrow{e_y}$. On a également $\overrightarrow{n_{1/2}} = -\overrightarrow{e_z}$.

La relation de passage $\overrightarrow{B_2}(M) - \overrightarrow{B_1}(M) = \mu_0\overrightarrow{j_s}\Lambda\overrightarrow{n_{2/1}}$ donne donc $\frac{2E_0}{c}\cos(\omega t)\overrightarrow{e_y} = \mu_0\overrightarrow{j_s}\Lambda(-\overrightarrow{e_z})$.

$\overrightarrow{j_s}$ est donc selon Ox soit $\overrightarrow{j_s} = j_s\overrightarrow{e_x}$. On remplace dans la relation de passage: $\frac{2E_0}{c}\cos(\omega t)\overrightarrow{e_y} = \mu_0 j_s\overrightarrow{e_x}\Lambda(-\overrightarrow{e_z}) = \mu_0 j_s\overrightarrow{e_y}$ donc $j_s = -\frac{2E_0}{\mu_0 c}\cos(\omega t)$ soit $\overrightarrow{j_s} = \frac{2E_0}{\mu_0 c}\cos(\omega t)\overrightarrow{e_x}$.

VI. **Onde électromagnétique dans le vide**

1. L'équation de propagation du champ électrique s'écrit $\Delta\overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$.

Ici $\Delta\overrightarrow{E} = -\beta^2\overrightarrow{E} - \alpha^2\overrightarrow{E}$ et $\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = -\omega^2\overrightarrow{E}$.

On a donc $-\beta^2\overrightarrow{E} - \alpha^2\overrightarrow{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$ soit $\frac{\omega^2}{c^2} = \alpha^2 + \beta^2$.

2. On a $\overrightarrow{E} = E_0\cos(\beta y)\cos(\omega t - \alpha x)\overrightarrow{e_z} = \frac{E_0}{2}(\cos(\omega t - \alpha x + \beta y) + \cos(\beta y - \omega t - \alpha x)\overrightarrow{e_z} = \frac{E_0}{2}(\cos(\omega t - \alpha x + \beta y) + \cos(\omega t - \alpha x - \beta y)\overrightarrow{e_z}$: c'est la somme de deux OPPH de vecteurs d'onde $\overrightarrow{k_1} = \alpha\overrightarrow{e_x} - \beta\overrightarrow{e_y}$ pour $\overrightarrow{E_1} = \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - \alpha x + \beta y)\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{k_2} = \alpha\overrightarrow{e_x} + \beta\overrightarrow{e_y}$ pour $\overrightarrow{E_2} = \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - \alpha x - \beta y)\overrightarrow{e_x}$.

3. Le champ magnétique associé à cette onde peut se calculer en utilisant la décomposition en deux OPPH soit $\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{k_1}\Lambda\overrightarrow{E_1}}{\omega} + \frac{\overrightarrow{k_2}\Lambda\overrightarrow{E_2}}{\omega}$

On peut aussi utiliser l'équation de Maxwell Faraday $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E} = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$ pour trouver $\overrightarrow{B}$.

VII. **Onde stationnaire**

1. Cette onde est stationnaire car les variables x et t ne sont pas dans le même terme.

2. Le champ électrique est continu donc $\overrightarrow{E}(x = 0^-) = \overrightarrow{E}(x = 0^+)$ donne $f(0) = 0$. On écrit aussi la continuité en $x = d$ soit $f(d) = 0$.

3. L'équation de propagation vérifiée par le champ électrique est $\Delta\overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$ soit $f''(x) + \frac{\omega^2}{c^2}f(x) = 0$. On trouve l'équation d'un OH de pulsation propre $k = \frac{\omega}{c}$ et de solution $f(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$ avec pour CL:

$f(x = 0) = 0 = A$ et $f(x = d) = 0 = B\sin(kd)$ impose $\sin(kd) = 0$ soit $k_n d = n\pi$ et $\omega_n = k_n c = \frac{n\pi c}{d}$.
Ainsi on a $f(x) = B\sin(\frac{n\pi x}{d})$ (dans l'expression du champ électrique on peut enlever la constante B, elle est comprise dans la constante E_0 donnée dans l'énoncé).

4. Le champ magnétique de cette onde se déduit de l'équation de Maxwell Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$. Soit $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E} = \dfrac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{e_x}\Lambda E_0 \sin(\dfrac{n\pi x}{d})\cos(\omega_n t)\overrightarrow{e_y} = \dfrac{n\pi E_0}{d}\cos(\omega_n t)\cos(\dfrac{n\pi x}{d})\overrightarrow{e_z}$ d'où $\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = -\dfrac{n\pi E_0}{d}\cos(\omega_n t)\cos(\dfrac{n\pi x}{d})\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{B} = -\dfrac{n\pi E_0}{\omega_n d}\sin(\omega_n t)\cos(\dfrac{n\pi x}{d})\overrightarrow{e_z} = -\dfrac{E_0}{c}\sin(\omega_n t)\cos(\dfrac{n\pi x}{d})\overrightarrow{e_z}$.

5. La valeur moyenne du vecteur de Poynting car pour une OS l'énergie ne se propage pas.

VIII. **OPPH dans le vide**

1. La fréquence de l'onde est $f = \dfrac{c}{\lambda} = 5.10^{14}\ Hz$.

La phase $\dfrac{kx}{\sqrt{5}} + \dfrac{2ky}{\sqrt{5}} - \omega t)$ est de la forme $\overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM} - \omega t$ soit par identification $\overrightarrow{k} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}(\overrightarrow{e_x} + 2\overrightarrow{e_y})$. La norme du vecteur d'onde est $||\overrightarrow{k}|| = \dfrac{a}{\sqrt{5}}\sqrt{1^2+2^2} = a = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

On a $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{k}}{||\overrightarrow{k}||} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\overrightarrow{e_x} + 2\overrightarrow{e_y})$.

2. On applique Maxwell Gauss: $\div\overrightarrow{E} = 0$ (dans le vide, $\rho = 0$) soit $\dfrac{\partial E_x}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y}{\partial y} = 0$ soit $\dfrac{\partial E_y}{\partial y} = -\dfrac{\partial E_x}{\partial x} = \dfrac{aE_0}{\sqrt{5}}\sin(\dfrac{ax}{\sqrt{5}} + \dfrac{2ay}{\sqrt{5}} - \omega t)$ et donc $E_y = -\dfrac{aE_0}{2a\sqrt{5}}\cos(\dfrac{ax}{\sqrt{5}} + \dfrac{2ay}{\sqrt{5}} - \omega t)$ (la constante d'intégration est nulle car les constantes ne se propagent pas).

3. L'onde est une OPPH, on peut appliquer la relation de structure $\overrightarrow{B} = \dfrac{\overrightarrow{u}\Lambda\overrightarrow{E}}{c} = -\dfrac{\sqrt{5}E_0}{2c}\cos(\dfrac{kx}{\sqrt{5}} + \dfrac{2ky}{\sqrt{5}} - \omega t)\overrightarrow{e_z}$.

4. On trouve le vecteur de Poynting en écrivant $\overrightarrow{R} = \dfrac{\overrightarrow{E}\Lambda\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \dfrac{5E_0^2}{8\mu_0 c}\overrightarrow{u}$: le vecteur de Poynting est bien dans le sens et la direction de propagation de l'onde.