TD absorption dispersion

I. **Visualisation du phénomène d' absorption**

Voir feuille.

II. **Propagation dans un conducteur ohmique**

1. On écrit l'équation de conservation de la charge $\mathrm{div}\vec{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial \mathrm{t}} = 0$ avec d'après la loi d'Ohm $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ et d'après Maxwell Gauss $\mathrm{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$.

d'où l'équation différentielle $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\gamma}{\epsilon_0}\rho = 0$ de solution $\rho = \rho_0 e^{-t/\tau}$ où $\tau = \dfrac{\epsilon_0}{\gamma} = 8,8.10^{-20}\ s$: au bout de 5τ la densité volumique de charges est nulle, donc on écrit qu'à tout instant on a $\rho = 0$.

2. On applique $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$

Soit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}) = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}) = -\mu_0\gamma\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$.

L'équation de propagation est donc $\Delta\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0\gamma\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$.

Pour $\gamma = 0$ (dans le vide) on retrouve l'équation de d'Alembert $\Delta\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$.

On remplace la solution proposée dans l'équation de propagation pour obtenir la relation de dispersion: $-k^2\underline{\vec{E}} - \dfrac{1}{c^2}(-\omega^2)\underline{\vec{E}} - \mu_0\gamma i\omega\underline{\vec{E}} = \vec{0}$ soit $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\gamma\omega$.

3. Dans le visible, on sait que $\lambda = 600\ nm$ soit $f = \dfrac{c}{\lambda} = 5.10^{14}\ Hz$.

On doit comparer les deux termes de la somme $\dfrac{\omega^2}{c^2}$ et $\mu_0\gamma\omega$. On en fait le rapport: $\dfrac{\omega^2}{c^2\mu_0\gamma\omega} = \dfrac{\omega}{c^2\mu_0\gamma} = 2.7.10^{-4} << 1$ donc le vecteur d'onde s'écrit $\underline{k}^2 = -i\mu_0\gamma\omega = e^{-i\pi/2}\mu_0\gamma\omega$.

On en déduit $\underline{k} = e^{-i\pi/4}\sqrt{\mu_0\gamma\omega} = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu_0\gamma\omega} = \dfrac{1-i}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$.

On en déduit le champ électrique en notation réelle en prenant la partie réelle du champ électrique en complexe: $\underline{\vec{E}} = E_0\vec{e_x}e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta} + i\frac{z}{\delta})}$ d'où $\vec{E} = E_0\vec{e_x}e^{-z/\delta}\cos(\omega t - \dfrac{z}{\delta})$.

Le terme de phase montre qu'il y a propagation selon $+Oz$.

L'amplitude de l'onde diminue quand z augmente soit quand l'onde se propage donc il y a absorption. δ représente l'épaisseur de peau soit la distance sur laquelle l'onde se propage avant d'être totalement absorbée.

4. AN: $\delta = 2,2.10^{-9}\ m$.

5. On applique l'équation de Maxwell Faraday pour trouver le champ magnétique de l'onde.

III. **Conductivité d'un métal**

1. Cette force type frottement fluide résulte de l'interaction des électrons avec les autres électrons et avec les ions du réseau cristallin.

2. Le rapport de la force magnétique sur la force électrique s'écrit $\dfrac{evB}{eE} \approx \dfrac{v}{c} << 1$ pour un électron non relativiste (v est la vitesses des électrons et c la vitesse des ondes: on suppose que la relation $Bc = E$ valable pour les OPPH dans le vide est aussi valable dans le métal).

RFD appliquée à un électron: $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \dfrac{m\vec{v}}{\tau}$

En notation complexe cela devient $-i\omega m\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}} - \dfrac{m\underline{\vec{v}}}{\tau}$ d'où $\underline{\vec{v}} = \dfrac{-e\tau}{m}\dfrac{\underline{\vec{E}}}{1 - i\omega\tau}$.

On en déduit le vecteur courant $\underline{\vec{j}} = n(-e)\underline{\vec{v}} = \dfrac{ne^2\tau}{m}\dfrac{\underline{\vec{E}}}{1 - i\omega\tau}$ de la forme $\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}}$ (loi d'Ohm local) avec

$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 - i\omega\tau}$. γ_0 représente la conductivité pour $\omega = 0$ soit la conductivité en régime continu.

AN: $\tau = \frac{m\gamma_0}{ne^2} = 2,1.10^{-14}\ s$.

3.

3.a. Dans l'expression de $\underline{\gamma}$, on cherche à simplifier la somme au dénominateur, il faut donc comparer 1 et $\omega\tau$. AN: $\omega\tau = 2\pi f\tau = 2,7.10^{-9} << 1$ donc la conductivité s'écrit $\underline{\gamma} = \gamma_0$.

Dans l'équation de Maxwell Ampère, il s'agit de comparer les deux termes de la somme soit $\overrightarrow{j} = \gamma_0\overrightarrow{E}$ (courant de conduction) et $\epsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$ (courant de déplacement). On fait le rapport $\frac{\gamma_0 E}{\epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}} = \frac{\gamma_0 E}{\epsilon_0\omega E} = \frac{\gamma_0}{\epsilon_0\omega} = 5,4.10^{13} >> 1$: le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction.

L'équation de Maxwell Ampère s'écrit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0\overrightarrow{j} = \mu_0\gamma_0\overrightarrow{E}$.

3.b. On applique $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\overrightarrow{E}) - \Delta\overrightarrow{E} = -\Delta\overrightarrow{E}$

Soit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(-\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{B} = -\mu_0\gamma_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$.

On a donc $\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0\gamma_0}\Delta\overrightarrow{E}$. C'est une équation de diffusion avec pour coefficient de diffusion $D = \frac{1}{\mu_0\gamma_0}$ avec D est en $m^2.s^{-1}$.

3.c. Je modifie la question: à la question précédente, on a obtenu l'équation de propagation, je cherche la relation de dispersion en remplaçant la solution proposée pour le champ électrique dans l'équation de propagation soit $-i\omega\underline{\overrightarrow{E}} = D(i\overrightarrow{k})^2\underline{\overrightarrow{E}}$ soit $k^2 = -\frac{i\omega}{D} = -i\omega\mu_0\gamma_0 = e^{-i\pi/2}\omega\mu_0\gamma_0$. On en déduit $\underline{k} = e^{-i\pi/4}\sqrt{\omega\mu_0\gamma_0} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu_0\gamma_0} = \frac{1-i}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\gamma_0}} = \sqrt{\frac{1}{\pi\mu_0\gamma_0 f}}$.

Le vecteur d'onde possède une partie réelle: il y a donc propagation

Le vecteur d'onde possède une partie imaginaire: il y a donc absorption. δ s'appelle l'épaisseur de peau. AN: $\delta = 0,46\ mm$.

IV. **Plasma sans collision**

1. Le plasma est neutre donc la charge totale est nulle: $n_e(-e) + n_c(+Ze) = 0$.

2. Le rapport de la force magnétique sur la force électrique s'écrit $\frac{evB}{eE} \approx \frac{v}{c} << 1$ pour un électron non relativiste (v est la vitesses des électrons et c la vitesse des ondes: on suppose que la relation $Bc = E$ valable pour les OPPH dans le vide est aussi valable dans le plasma).

3. Pour les électrons on a $\underline{\overrightarrow{j}}_e = n_e(-e)\underline{\overrightarrow{v_e}}$ et pour les cations on a $\underline{\overrightarrow{j}}_c = n_c(+Ze)\underline{\overrightarrow{v_c}}$. On peut négliger la contribution des cations car ils sont très lourds par rapport aux électrons et donc leur vitesse est très petite devant celle des électrons.

Pour la fin, voir votre cours

V. **Plasma avec collisions**

1. Le rapport de la force magnétique sur la force électrique s'écrit $\frac{evB}{eE} \approx \frac{v}{c} << 1$ pour un électron non relativiste (v est la vitesses des électrons et c la vitesse des ondes: on suppose que la relation $Bc = E$ valable pour les OPPH dans le vide est aussi valable dans le plasma).

Le poids est $P = mg = 10^{-29}\ N$, la force électrique est de la forme $F_e = eE \approx 10^{-19}E\ N$: pour des champs électriques petits devant $10^{-10}\ V/m$, la force électrique est toujours grande devant le poids. Les champs électriques usuels sont de l'ordre de $10 - 100\ V/m$.

2. RFD appliquée à un électron: $m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -e\overrightarrow{E} - \frac{m\overrightarrow{v}}{\tau}$

En notation complexe cela devient $i\omega m\underline{\overrightarrow{v}} = -e\underline{\overrightarrow{E}} - \frac{m\underline{\overrightarrow{v}}}{\tau}$ d'où $\underline{\overrightarrow{v}} = \frac{-e\tau}{m}\frac{\underline{\overrightarrow{E}}}{1 + i\omega\tau}$.

On en déduit le vecteur courant $\underline{\overrightarrow{j}} = n(-e)\underline{\overrightarrow{v}} = \frac{ne^2\tau}{m}\frac{\underline{\overrightarrow{E}}}{1 + i\omega\tau}$ de la forme $\underline{\overrightarrow{j}} = \underline{\gamma}\underline{\overrightarrow{E}}$ (loi d'Ohm local) avec

$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1+i\omega\tau}$. γ_0 représente la conductivité pour $\omega = 0$ soit la conductivité en régime continu.

3. AN: $\gamma_0 = 2,8\ S.m^{-1}$.

Pour simplifier $\underline{\gamma}$, on doit comparer les termes 1 et $\omega\tau$ pour des ondes visibles soit pour $\lambda = 600\ nm$, $f = \frac{c}{\lambda} = 5.10^{14}\ Hz$ et $\omega = 2\pi f = 3.10^{15}\ rad/s$. On a donc $\omega\tau = 3.10^3 >> 1$ donc on peut négliger 1 devant $\omega\tau$ soit $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{i\omega\tau}$.

4. **4.a.** L'onde est polarisée selon Oz donc la direction du vecteur champ électrique est $\overrightarrow{e_z}$. L'onde se propage selon Ox donc la phase est de la forme $\omega t - kx$. Le champ électrique de l'onde s'écrit donc $\underline{\overrightarrow{E}} = E_0 \overrightarrow{e_z} e^{i(\omega t - kx)}$.

4.b. On trouve l'équation de propagation en utilisant les équations de Maxwell avec $\rho = 0$ (plasma neutre) et la relation mathématique:

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\overrightarrow{E}) - \Delta\overrightarrow{E} = -\Delta\overrightarrow{E}$

Soit $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(-\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{B} = -\mu_0\gamma\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2}$.

On a donc $\Delta\overrightarrow{E} - \mu_0\gamma\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$.

On remplace la solution $\underline{\overrightarrow{E}} = E_0 \overrightarrow{e_z} e^{i(\omega t - kx)}$ dans l'équation de propagation avec $\Delta\overrightarrow{E} = \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial x^2}$.

On obtient $-k^2 - \frac{1}{c^2}(-\omega^2) - \mu_0\underline{\gamma}i\omega = 0$ avec $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{i\omega\tau}$ donc $-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0\frac{\gamma_0}{\tau} = 0$ soit $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0\frac{\gamma_0}{\tau}$ de la forme $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2}$ en identifiant $\frac{\omega_p^2}{c^2} = \mu_0\frac{\gamma_0}{\tau}$ soit $\omega_p^2 = \mu_0 c^2\frac{\gamma_0}{\tau} = \frac{\gamma_0}{\tau\epsilon_0} = \frac{ne^2}{m\epsilon_0}$.

4.c. Pour $\omega < \omega_p$: $k^2 < 0$ et donc k sera imaginaire pur, il n'y aura pas de propagation, mais il y aura de l'absorption.

Pour $\omega > \omega_p$: $k^2 > 0$ et donc k sera réel, il y aura propagation sans absorption.

$\omega_p = \sqrt{\frac{\gamma_0}{\tau\epsilon_0}} = 5,6.10^{11}\ rad/s$

pour les ondes lumineuses $\omega = 3.10^{15}\ rad/s > \omega_p$: les ondes lumineuses peuvent donc se propager dans un tel milieu.

VI. **Corde vibrante dans un fluide visqueux**

1. $[h] = [\frac{df}{dxv}] = \frac{kg.m.s^{-2}}{m.m.s^{-1}} = kg.m^{-1}.s^{-1}$.

2. On a $\tan\alpha = \frac{y(x+dx,t) - y(x,t)}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x}$ car dx petit. L'angle α est petit également donc $\tan\alpha = \alpha$ soit $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$.

3. On considère le bout de corde compris entre x et $x+dx$. Il a pour masse μdx et pour accélération $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\overrightarrow{e_y}$. Il est soumis aux forces:

- de tension de la corde à droite: $\overrightarrow{T_d}(x+dx,t) = ||\overrightarrow{T_d}(x+dx,t)||(\cos\alpha(x+dx,t)\overrightarrow{e_x} + \sin\alpha(x+dx,t)\overrightarrow{e_y}) \approx ||\overrightarrow{T_d}(x+dx,t)||(\overrightarrow{e_x} + \alpha(x+dx,t)\overrightarrow{e_y})$

- de tension de la corde à gauche: $\overrightarrow{T_g}(x,t) = -||\overrightarrow{T_g}(x,t)||(\cos\alpha(x,t)\overrightarrow{e_x} + \sin\alpha(x,t)\overrightarrow{e_y}) \approx -||\overrightarrow{T_g}(x,t)||(\overrightarrow{e_x} + \alpha(x,t)\overrightarrow{e_y})$

- le poids est négligé

- la force de frottement $d\overrightarrow{f} = -hdx\overrightarrow{v}(x,t) = -hdx\frac{\partial y}{\partial t}\overrightarrow{e_y}$.

La RFD appliquée à la portion de corde s'écrit donc $\mu dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{T_g}(x,t) + \overrightarrow{T_d}(x+dx,t) + d\overrightarrow{f}$

En projection sur Ox: $0 = -||\overrightarrow{T_g}(x,t)|| + ||\overrightarrow{T_d}(x+dx,t)||$ montre que la norme de la tension est uniforme.

4. En projection sur Oy: $\mu dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0\alpha(x+dx,t) - T_0\alpha(x,t) - hdx\frac{\partial y}{\partial t} = T_0\frac{\partial \alpha}{\partial x}dx - hdx\frac{\partial y}{\partial t} = T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx -$

$hdx\dfrac{\partial y}{\partial t}$

On a donc l'équation de propagation $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{\mu}{T_0}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \dfrac{h}{T_0}\dfrac{\partial y}{\partial t} = 0$. Par identification avec l'énoncé on a $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$ (vitesse des ondes sur la corde en absence de frottements).

5. On remplace la solution proposée $\underline{y}(x,t) = y_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$ dans l'équation de propagation soit $-\underline{k}^2 - \dfrac{1}{c^2}(-\omega^2) - \dfrac{h}{T_0}i\omega = 0$ d'où $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{h}{T_0}i\omega$.

6. Dans le cas où $h >> \mu\omega$, le terme $\dfrac{\omega^2}{c^2} = \dfrac{\mu\omega^2}{T_0}$ est négligeable devant le terme $\dfrac{h}{T_0}\omega$. On a donc $\underline{k}^2 = -\dfrac{h}{T_0}i\omega = e^{-i\pi/2}\dfrac{h\omega}{T_0}$ et donc $\underline{k} = e^{-i\pi/4}\sqrt{\dfrac{h\omega}{T_0}} = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{h\omega}{T_0}} = \dfrac{1-i}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\dfrac{2T_0}{h\omega}}$.

On a donc $\underline{y} = y_0 e^{i(\omega t - \frac{(1-i)x}{\delta})} = y_0 e^{-x/\delta}e^{i(\omega t - x/\delta)}$. On en prend la partie réelle pour trouver $y(x,t)$ soit $y(x,t) = y_0 e^{-x/\delta}\cos(\omega t - x/\delta)$.

Le terme $\omega t - x/\delta$ est le terme de phase qui montre qu'il y a propagation selon $+Ox$.

Le terme $y_0 e^{-x/\delta}$ est le terme d'amplitude qui diminue quand x augmente soit qui diminue quand l'onde se propage donc il y a absorption.

7. La vitesse de phase est $v_\phi = \dfrac{\omega}{\mathcal{R}e(\underline{k}} = \delta\omega$: elle dépend de ω ainsi les ondes de fréquences différentes ne se propagent pas à la même vitesse ce qui signifie qu'il y a dispersion.

VII. **Effet cave**

1. La température au sol est de la forme $T(t) = T_0 + \theta_0\cos(\omega t)$. La température maximale est $T_{max} = T_0 + \theta_0 = 30^0C$ et la température minimale est $T_{min} = T_0 - \theta_0 = -10^0C$. On en déduit que $T_0 = \dfrac{T_{max}+T_{min}}{2} = 10^0C$ et $\theta_0 = \dfrac{T_{max}-T_{min}}{2} = 20^0C$. La période du phénomène est une année soit $T = 24.3600.365\ s$ et la pulsation est $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

2. $[\lambda] = J.s^{-1}.K^{-1}.m^{-1}$

$[c] = J.K^{-1}.kg^{-1}$

$[\rho] = m^2.s^{-1}$

$[D] = m^2.s^{-1}$

On pose $D = \lambda^a\rho^b c^e$ soit $m^2.s^{-1} = J^a.s^{-a}.K^{-a}.m^{-a}kg^b.m^{-3b}J^e.K^{-e}.kg^{-e}$ donc $2 = -a - 3b$ (pour les mètres), $-1 = -a$ (pour les secondes), $0 = a + e$ (pour les Joule) et $0 = -a - e$ (pour les Kelvin) soit $a = 1$, $b = -1$ et $e = -1$.

D'où $D = \dfrac{\lambda}{\rho c}$.

3. On remplace $\underline{T}(z,t) = T_0 + \underline{F}(z)e^{i\omega t}$ dans l'équation de diffusion:

avec $\dfrac{\partial \underline{T}}{\partial t} = i\omega\underline{F}(z)e^{i\omega t}$

avec $\dfrac{\partial^2 \underline{T}}{\partial z^2} = \underline{F}''(z)e^{i\omega t}$

On a donc $i\omega\underline{F}(z)e^{i\omega t} = D\underline{F}''(z)e^{i\omega t}$ soit à résoudre $\underline{F}''(z) - \dfrac{i\omega}{D}\underline{F}(z) = 0$.

On écrit l'équation caractéristique: $r^2 - \dfrac{i\omega}{D} = 0$ soit $r^2 = \dfrac{i\omega}{D} = e^{i\pi/2}\dfrac{\omega}{D}$ qui donne $r_1 = +e^{i\pi/4}\sqrt{\dfrac{\omega}{D}} = (1+i)\sqrt{\dfrac{\omega}{2D}}$ et $r_2 = -e^{i\pi/4}\sqrt{\dfrac{\omega}{D}} = -(1+i)\sqrt{\dfrac{\omega}{2D}}$.

La solution $\underline{F}(z)$ est donc de la forme $\underline{F}(z) = Ae^{r_1 z} + Be^{r_2 z} = Ae^{\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}e^{i\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z} + Be^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}e^{-i\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}$.

Or la terre occupe le demi espace $z > 0$ donc z peut tendre vers l'infini et donc $e^{\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}$ diverge ainsi on doit prendre $A=0$ pour que $\underline{F}(z)$ soit toujours définie.

On a donc $\underline{F}(z) = Be^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}e^{-i\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}$.

Ainsi la température s'écrit $\underline{T}(z,t) = T_0 + Be^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}e^{-i\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}e^{i\omega t} = T_0 + Be^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}e^{i(\omega t-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z)}$.

Pour $z=0$: $\underline{T}(z=0,t) = T_0 + Be^{i\omega t}$ qui donne $T(z=0,t) = T_0 + B\cos(\omega t)$ en notation réelle et par identification avec l'énoncé on trouve $B=\theta_0$.

Ainsi on a $\underline{T}(z,t) = T_0 + \theta_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}e^{i(\omega t-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z)}$. On en prend la partie réelle pour trouver $T(z,t)$ soit $T(z,t) = T_0 + \theta_0 e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}\cos(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}z)$.

Il y a de la propagation dans le terme $\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}z$.

Il y a de l'absorption lié au terme $e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}$ de la forme $e^{-z/\delta}$. Ainsi l'amplitude des oscillations de température diminue quand on s'enfonce dans le sol. On peut définir une épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$.

VIII. **Axone**

1. La loi des mailles s'écrit: $u(x+dx,t) = u(x,t) - r_a dx i(x,t)$ soit $u(x+dx,t) - u(x,t) = -r_a dx i(x,t)$ d'où avec dx petit: $\frac{\partial u}{\partial x} = -r_a i(x,t)$.

La tension aux bornes du condensateur de capacité $c_m dx$ et de la conductance $g_m dx$ est $u(x+dx,t)$.

Le courant dans le condensateur en convention récepteur (sens opposé à $u(x+dx,t)$ soit vers le bas) s'écrit $i_c = c_m dx \frac{\partial u}{\partial t}(x+dx,t)$.

Le courant dans la conductance g_m en convention récepteur (sens opposé à $u(x+dx,t)$ soit vers le bas) s'écrit $i_g = g_m dx u(x+dx,t)$.

La loi des noeuds s'écrit: $i(x,t) = i(x+dx,t) + i_c + i_g$ soit $i(x+dx,t) - i(x,t) = -i_c - i_g$ d'où $\frac{\partial i}{\partial x} = -c_m dx \frac{\partial u}{\partial t}(x+dx,t) - g_m u(x+dx,t)$ qui donne $\frac{\partial i}{\partial x} = -c_m \frac{\partial u}{\partial t} - g_m u$.

2. On a donc $\frac{\partial u}{\partial x} = -r_a i$ soit $i = -\frac{1}{r_a}\frac{\partial u}{\partial x}$.

On remplace l'expression de i dans la deuxième équation soit $\frac{\partial i}{\partial x} = -c_m dx \frac{\partial u}{\partial t} - g_m u$ donne $-\frac{1}{r_a}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -c_m \frac{\partial u}{\partial t} - g_m u$ soit $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r_a c_m \frac{\partial u}{\partial t} - r_a g_m u = 0$.

3. Pour montrer qu'un terme est négligeable devant un autre, on fait le rapport de ces deux termes soit ici: $\frac{g_m u}{c_m \frac{\partial u}{\partial t}}$.

En notation complexe ce rapport s'écrit $\frac{g_m \underline{u}}{c_m \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}} = \frac{g_m \underline{u}}{j\omega c_m \underline{u}} = \frac{g_m}{j\omega c_m}$ de module $\frac{g_m}{\omega c_m}$. Ce terme est très petit devant 1 lorsque $g_m << \omega c_m$ soit lorsque $\omega >> \frac{g_m}{c_m}$.

Dans ce cas, on néglige le terme $g_m u$ dans l'équation de propagation et on a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = r_a c_m \frac{\partial u}{\partial t}$ qui est de la forme $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r_a c_m}\Delta u$ avec $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

4. On reconnaît une équation de diffusion avec pour coefficient de diffusion $D = \frac{1}{r_a c_m}$. On peut citer comme exemples de diffusion, la diffusion thermique et la diffusion de particules.

5. On remplace la solution proposée $\underline{u} = u_0 e^{i(\omega t - \underline{k}x)}$ dans l'équation de propagation soit:
$i\omega \underline{u} = \frac{1}{r_a c_m}(-\underline{k}^2)\underline{u}$ d'où $\underline{k}^2 = -i\omega r_a c_m = e^{-i\pi/2}\omega r_a c_m$ et $\underline{k} = e^{-i\pi/4}\sqrt{\omega r_a c_m} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega r_a c_m} = \frac{1-i}{\delta}$.

On a donc $\underline{u} = u_0 e^{i(\omega t - \frac{(1-i)x}{\delta})} = u_0 e^{-x/\delta}e^{i(\omega t - x/\delta)}$. On en prend la partie réelle pour trouver $u(x,t)$ soit $u(x,t) = u_0 e^{-x/\delta}\cos(\omega t - x/\delta)$.

Le terme $\omega t - x/\delta$ est le terme de phase qui montre qu'il y a propagation selon $+Ox$.

Le terme $u_0 e^{-x/\delta}$ est le terme d'amplitude qui diminue quand x augmente soit qui diminue quand l'onde se propage donc il y a absorption.

6. La vitesse de phase est $v_\phi = \dfrac{\omega}{\mathcal{R}e(\underline{k}} = \delta\omega$: elle dépend de ω ainsi les ondes de fréquences différentes ne se propagent pas à la même vitesse ce qui signifie qu'il y a dispersion.