

# DS 9 de physique

Le sujet comprend trois problèmes à traiter dans l'ordre de votre choix. Il est demandé de numéroter les pages au format  $i/N$  où  $i$  est le numéro de la page et  $N$  le nombre de pages.

Tous les résultats doivent être encadrés et justifiés. Quand vous utilisez une loi il faut donner le nom de la loi et préciser les hypothèses d'application.

## I. P I: Réflexion d'une onde sur une surface métallique

Lors de la réflexion d'une onde électromagnétique de forte intensité sur une surface métallique, celle-ci risque d'être endommagée du fait de l'ionisation du milieu sous l'effet du champ électrique. Le but de ce problème est de déterminer l'ordre de grandeur de la puissance maximale de l'onde incidente pour éviter ce phénomène.

Le métal (de l'or) occupe tout le demi-espace  $z > 0$ , le demi espace  $z < 0$  étant de l'air assimilé au vide. L'onde incidente est supposée monochromatique et se propage dans le vide suivant l'axe Oz dans le sens des  $z$  croissants (incidence normale). La longueur d'onde dans le vide de cette onde est  $\lambda = 1050 \text{ nm}$ .

Le métal est constitué d'ions et d'électrons libres. On note  $n$  le nombre d'électrons libres par unité de volume,  $q = -e$  la charge d'un électron et  $m$  sa masse. La vitesse d'un électron au point  $M$  à l'instant  $t$  est notée  $\vec{v}(t)$ . On adopte le modèle suivant (modèle de Drude) :

- les électrons sont traités dans le cadre de la mécanique classique
- les électrons subissent de la part du réseau cristallin une force de la forme  $\vec{f} = -m\tau\vec{v}$  où  $\tau$  est une constante caractéristique du milieu
- l'effet du champ magnétique sur un électron est négligeable.

On donne:  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{a}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\vec{a}) - \Delta\vec{a}$ .

### 1. Conductivité du milieu

**1.a.** En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un électron, donner l'équation différentielle vérifiée par  $\vec{v}(M, t)$ .

On se place pour toute la suite dans le cas d'un régime sinusoïdal forcé de pulsation  $\omega$ :  $\vec{v}(M, t) = \underline{\vec{v}}(t)e^{i\omega t}$ .

Donner l'expression de  $\vec{v}(M, t)$  en fonction du champ électrique complexe  $\vec{E}(M, t)$ .

**1.b.** Justifier que la contribution des ions au vecteur densité de courant électrique  $\vec{j}(M, t)$  est négligeable. Montrer que l'on peut écrire:  $\vec{j}(M, t) = \underline{\sigma}\vec{E}(M, t)$  avec  $\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau}$  où  $\sigma_0$  est une constante réelle à exprimer en fonction des données. À quoi correspond  $\sigma_0$ ?

**1.c.** On donne : masse volumique de l'or  $\mu = 19\,300 \text{ kg.m}^{-3}$ , masse molaire de l'or  $M = 197 \text{ g.mol}^{-1}$  et  $\sigma_0 = 4,5 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ .

En supposant que chaque atome donne un électron libre, calculer la densité d'électrons  $n$  dans l'or ainsi que la constante  $\tau$ . Préciser l'unité de  $\tau$  et son sens physique.

Montrer, en tenant compte des applications numériques précédentes, que l'on peut simplifier l'expression de la conductivité à :  $\underline{\sigma} = \frac{ne^2}{mi\omega}$ .

### 2. Nature de l'onde

On suppose que le milieu n'est pas magnétique et qu'à tout instant et en chaque point la densité volumique de charge électrique est nulle.

**2.a.** Écrire les équations de Maxwell vérifiées par les champs électrique et magnétique dans le conducteur.

**2.b.** En déduire l'équation d'onde vérifiée par le champ électrique.

**2.c.** On cherche à étudier la propagation d'un champ de la forme  $\vec{E}(M, t) = \underline{E}(0)e^{i(\omega t - \underline{k}z)}\vec{e}_x$ .

Montrer que  $\underline{k}$  doit être solution de  $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$  où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide et  $\omega_p$  une constante caractéristique du matériau dont on donnera l'expression.

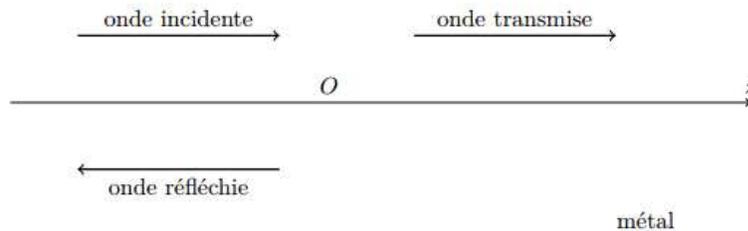
On admet pour la suite que  $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$  avec  $n = 5,9 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ .

**2.d.** Calculer  $\omega_p$  et montrer que  $\omega^2$  est négligeable devant  $\omega_p^2$ . En déduire  $\underline{k}$  en fonction de  $\omega_p$  et  $c$ . Commenter l'expression et en déduire l'expression du champ électrique en notation réelle.

**2.e.** Calculer numériquement la distance caractéristique sur laquelle le champ est non négligeable, appelée épaisseur de peau.

### 3. Réflexion d'une onde électromagnétique

Nous voulons exprimer l'amplitude complexe du champ dans le conducteur en fonction de l'amplitude de l'onde incidente.



Les champs électriques des ondes incidente et réfléchie dans le vide pour  $z < 0$  sont respectivement :  $\vec{E}_i(z, t) = E_0 e^{i(\omega t - \omega z/c)} \vec{e}_x$  et  $\vec{E}_r(z, t) = \underline{r} E_0 e^{i(\omega t + \omega z/c)} \vec{e}_x$  où  $\underline{r}$  est le coefficient, éventuellement complexe, de réflexion.

Le champ électromagnétique de l'onde transmise dans le métal pour  $z > 0$  s'écrit  $\vec{E}_t(z, t) = \underline{E}_t e^{-\omega_p z/c} e^{i\omega t} \vec{e}_x$  et  $\vec{B}_t(z, t) = \frac{-i\omega_p}{\omega c} \underline{E}_t e^{-\omega_p z/c} e^{i\omega t} \vec{e}_y$ .

**3.a.** Donner les expressions des champs magnétiques des ondes incidente et réfléchie.

**3.b.** Quelles relations les champs électriques et magnétiques des ondes incidente, réfléchie et transmise doivent-ils vérifier ?

**3.c.** En déduire l'expression du coefficient de réflexion. Conclure. Que peut-on dire de l'amplitude de l'onde réfléchie par rapport à celle de l'onde incidente ?

#### Données

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ (SI)}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ (SI)}$
Charge de l'électron	$q = -e = -1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse de l'électron	$m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Constante d'Avogadro	$N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

## II. Pb II: Le détatouage par laser

Ce problème aborde la question de l'effet du laser sur les pigments. Les interactions lumière-pigment et lumière tissu sont toujours un sujet de recherche aujourd'hui, à la fois en physique théorique et en médecine. La diversité des peaux, des pigments, des techniques de tatouage rendent leur modélisation très complexe.

#### Interactions laser-tissu

Le mécanisme d'action du laser sur le tissu dépend de la durée de l'impulsion et de la quantité d'énergie libérée. Quatre mécanismes d'action sont prépondérants : l'effet photochimique (aussi appelé photothérapie, obtenu pour des durées d'impulsion longues et une énergie faible), l'effet photothermique, l'effet photoablatif et l'effet électromécanique (obtenu pour des durées d'impulsion très courtes). Dans tous les cas, l'idée est d'apporter de l'énergie via le laser à des cibles. Les différents effets correspondent à des impacts différents de cet apport d'énergie.

#### Effacement du tatouage

Le tatouage impliquant une incorporation permanente de particules pigmentées dans la peau, retirer un tatouage nécessite leur fragmentation. Les fragments de pigments sont alors assez petits pour être évacués par les phagocytes via le circuit lymphatique.

On s'intéresse dans un premier temps à l'interaction entre l'onde électromagnétique générée par un laser et un milieu isolant non chargé. En effet, la peau, composée majoritairement d'eau et de mélanine, les vaisseaux sanguins, composés d'eau et d'hémoglobine, mais aussi les pigments du tatouage peuvent être considérés comme des milieux isolants non chargés. Pour comprendre les phénomènes apparaissant lorsqu'une onde électromagnétique se propage dans un tel milieu, l'étude consiste à s'appuyer sur les résultats relatifs à la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. Ainsi, dans les questions suivantes, il est toujours précisé si le milieu considéré est le vide ou un milieu isolant non chargé quelconque.

1. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide en précisant leur nom.

2. Établir l'équation de propagation vérifiée par le vecteur champ électrique dans le vide. Rappel:  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{a}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a}$ .

On rappelle que dans le vide, une solution à l'équation de propagation est l'onde plane progressive sinusoïdale, qu'on choisit se propageant selon la direction  $\vec{e}_x$ :  $\vec{E} = E_0 \vec{e}_y \cos(\omega t - kx)$ . On se place en régime harmonique, on peut donc associer à  $\vec{E}$  une grandeur complexe  $\underline{E} = E_0 \vec{e}_y e^{i(\omega t - kx)}$ .

3. En régime harmonique et dans le vide, établir la relation existant entre  $k$  et  $\omega$ .

En régime harmonique et dans un milieu isolant non chargé, on admet que les équations de Maxwell se modifient en remplaçant  $\epsilon_0$  par  $\epsilon_0 \epsilon_r$ ,  $\epsilon_r$  étant la permittivité diélectrique relative complexe du milieu. On obtient alors un vecteur d'onde potentiellement complexe et on le note donc  $\underline{k} = \underline{k} \vec{e}_x$ , avec  $\underline{k}$  complexe.

4. Établir que  $\underline{k}^2 = \epsilon_r \frac{\omega^2}{c^2}$ .

En régime harmonique et dans un milieu isolant non chargé,  $\underline{k}$  étant complexe, on peut l'écrire sous la forme  $\underline{k} = k' - ik''$ , où  $k'$  et  $k''$  sont réels et  $k'$  est strictement positif.

5. On suppose que  $k''$  est strictement positif. Exprimer le champ électrique de l'onde en notation réelle et commenter. Que peut-on en déduire énergétiquement ?

6. Que peut-on dire de  $k''$  lorsque  $\epsilon_r$  est un réel strictement positif? Comment se comporte alors le milieu de propagation ?

Un pigment noir est caractérisé par un  $k''$  peu dépendant de la longueur d'onde dans le vide et le proche infrarouge. On prend  $k'' = 5,0 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$ . On rappelle que le pigment d'un tatouage est situé sous la surface de la peau. Si l'on souhaite effacer celui-ci, il faut que le laser utilisé puisse traverser la peau sans dommage pour celle-ci.

7. En utilisant les courbes de la figure 5 donnant  $k''$  dans la peau en fonction de la longueur d'onde dans le vide du laser, déduire quelles longueurs d'onde de laser sont les plus adaptées pour effacer un tatouage noir.

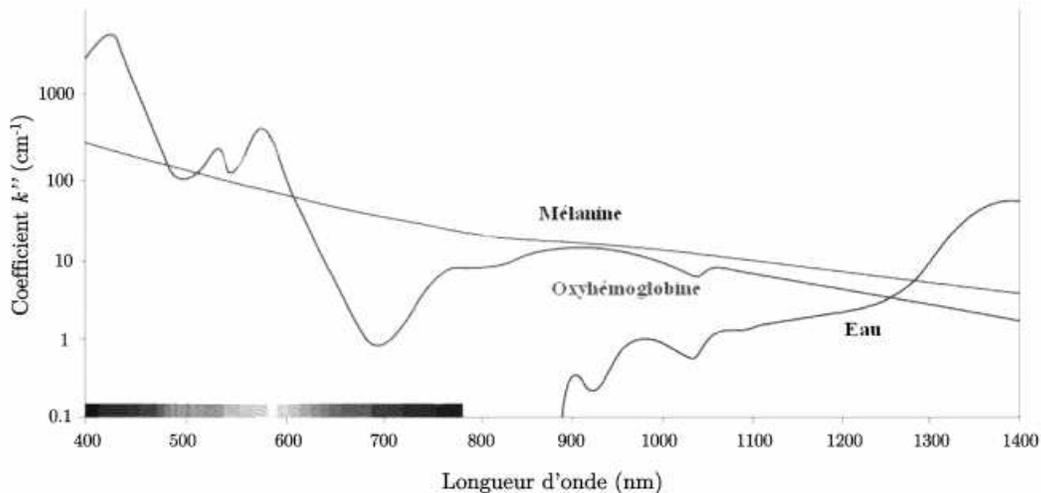


Figure 5 Spectres d'absorption en fonction de la longueur d'onde dans le vide des différents composants principaux de la peau

On admet que dans un milieu isolant non chargé, la relation de structure des ondes planes progressives monochromatiques est satisfaite en complexes en prenant  $\underline{k}$  au lieu de  $\vec{k}$ . On rappelle que la relation de structure permet d'exprimer le vecteur champ magnétique en fonction du vecteur d'onde, de la pulsation et du vecteur champ électrique.

8. En déduire que  $\vec{B} = \vec{B}_{0,1} e^{-k''x} \cos(\omega t - k'x) + \vec{B}_{0,2} e^{-k''x} \sin(\omega t - k'x)$  et expliciter  $\vec{B}_{0,1}$  et  $\vec{B}_{0,2}$  en

fonction de  $E_0$ ,  $k'$ ,  $k''$ ,  $\omega$  et  $\vec{e}_z$ .

On considère un échantillon du pigment, qu'on suppose cylindrique d'axe de révolution ( $Ox$ ). Les données relatives à l'échantillon de pigment sont:

Cet échantillon est éclairé par un laser sur la surface circulaire. L'origine  $O$  est placée à la surface du pigment recevant l'onde laser.

9. Rappeler l'expression du vecteur de Poynting et préciser son unité.

On admet que la valeur moyenne dans le temps du vecteur de Poynting est  $\langle \vec{R} \rangle = \frac{k' E_0^2 e^{-2k''x}}{2\mu_0\omega} \vec{u}_x$ .

10. En effectuant un bilan de puissance moyenne sur un cylindre élémentaire d'axe de révolution  $Ox$  compris entre  $x$  et  $x + dx$ , montrer que la puissance volumique moyenne cédée par le laser au pigment est

$$p_v(x) = \frac{k' k''}{\omega \mu_0} e^{-2k''x} E_0^2$$

11. On considère qu'un pigment noir a une longueur d'environ  $1 \mu m$ . Si on considère un laser Nd:Yag de longueur d'onde dans le vide  $1064 \text{ nm}$ , pourquoi peut-on considérer que la puissance volumique cédée au pigment noir est uniforme dans le pigment ?

On fait cette hypothèse dans la suite.

L'énergie cédée par le laser au pigment noir est donc convertie en énergie interne via le terme de puissance volumique calculé précédemment. Les lasers généralement utilisés pour le détatouage ont une fluence, c'est-à-dire une énergie qui traverse une unité de surface pendant la durée d'une impulsion laser, de l'ordre de  $5 \text{ J.cm}^{-2}$  et émettent des impulsions d'une durée de l'ordre de la nanoseconde. Le champ des températures dans le milieu ne dépend que d'une coordonnée d'espace  $x$  et du temps  $t$ :  $T(x, t)$ . On note  $p_v$  la puissance volumique cédée par le laser au milieu étudié, elle est supposée constante. Les autres caractéristiques du milieu étudié (un pigment noir) figurent dans les données.

#### Caractéristiques du pigment noir à effacer

Longueur	$L_p = 1 \mu m$
Rayon	$r_p = 1 \mu m$
Masse volumique	$\rho_p = 1 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
Capacité thermique massique	$c_p = 2,5 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Conductivité thermique	$\lambda_p = 50 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Vecteur d'onde pour $\lambda = 1064 \text{ nm}$	$k' = 3 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$ et $k'' = 5 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$

12. Écrire la loi de Fourier en donnant l'unité de toutes les grandeurs figurant dans cette loi et le sens physique de cette loi.

13. En effectuant un bilan d'énergie sur un cylindre élémentaire d'axe de révolution ( $Ox$ ) compris entre  $x$  et  $x + dx$ , montrer que l'équation différentielle satisfaite par  $T(x, t)$  s'écrit

$$\rho_p c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_p \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + p_v$$

14. Estimer littéralement le temps caractéristique du phénomène de diffusion dans le pigment une fois l'impulsion laser terminée. On l'exprimera en fonction d'une longueur caractéristique, de  $\rho_p$ ,  $c_p$  et  $\lambda_p$ .

15. Sachant que la durée de l'impulsion laser pour un détatouage est de l'ordre de la nanoseconde, on fait hypothèse que le phénomène de diffusion est négligeable devant le terme lié à l'onde laser. Simplifier l'équation différentielle précédente et en déduite  $T$  en fonction de  $t$ .

16. On suppose que le pigment garde ses caractéristiques quelle que soit la température et qu'il est initialement à la température de la peau ( $30^\circ C$ ). Dans le cadre de ce modèle, déterminer la valeur de la température finale à l'issue de l'impulsion laser. Commenter.

En réalité, l'effet électromécanique est souvent prédominant pour le détatouage. La petite taille des pigments permet en effet un confinement de l'énergie qui dépasse le seuil de claquage électrique : un plasma se forme et l'onde de choc associée à l'expansion du plasma engendre des ondes de pression importantes qui détruisent le pigment.

### III. Pb III: Chauffage par induction

Dans une plaque à induction, une bobine est placée sous une plaque en vitrocéramique. Lorsque cette bobine est parcourue par un courant électrique alternatif, un champ magnétique variable induit un champ électrique qui entraîne la circulation de courants électriques dans le métal du récipient posé sur la plaque. Ces courants électriques, appelés " courants de Foucault ", génèrent de l'énergie thermique par effet Joule. Nous nous intéresserons tout d'abord au champ magnétique créé par un fil rectiligne de longueur infinie, puis par une spire circulaire. Ensuite, nous nous intéresserons au phénomène d'induction dans le fond de la casserole et à l'effet Joule associé.

Théorème de Stokes:

$$\oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{(\Sigma)} \text{rot} \vec{A} \cdot dS \vec{n}$$
 où  $\Sigma$  est une surface qui s'appuie sur le contour fermé orienté  $C$

Données: conductivité thermique de l'acier:  $\lambda = 16 SI$ , capacité thermique massique de l'acier:  $c = 1,0 kJ.kg^{-1}.K^{-1}$  et masse volumique de l'acier:  $\rho = 8\,000 kg.m^{-3}$ .

#### Théorème d'Ampère

1. Ecrire l'équation de Maxwell-Ampère.

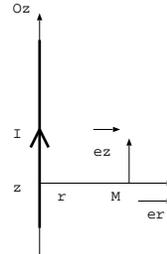
On considère que l'on se trouve dans le cas de régimes lentement variables. Le champ magnétique s'identifie alors au champ magnétique déterminé selon une approche de magnétostatique.

2. Que devient l'équation de Maxwell-Ampère dans le cadre de l'hypothèse précédente ?

3. En utilisant le théorème de Stokes, démontrer le théorème d'Ampère dans le cadre de la magnétostatique et dans le cas des courants circulant dans des circuits filiformes. Vous préciserez sur un schéma les conventions d'orientation des surfaces et contours utilisés.

#### Champ magnétique créé par un fil rectiligne de longueur infinie

Soit un fil rectiligne de longueur infinie confondu avec l'axe  $Oz$  parcouru par un courant électrique d'intensité  $I$  et placé dans le vide. L'espace est rapporté à la base cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ . On considère que, dans l'hypothèse de régimes lentement variables, le cas d'un courant d'intensité variable au cours du temps est assimilable au cas d'un courant d'intensité constante.

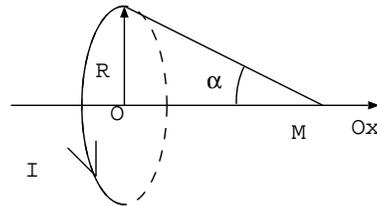


4. Analyser les symétries et les invariances de la distribution de courant pour déterminer la direction du champ magnétique et les paramètres d'espace dont dépendent sa ou ses coordonnées en coordonnées cylindriques.

5. En appliquant le théorème d'Ampère, établir l'expression du champ magnétique créé par ce fil à une distance  $r$  du fil. Préciser le contour d'Ampère choisi.

#### Champ magnétique créé par une spire

Soit une spire circulaire de rayon  $R$ , de centre  $O$ , parcourue par un courant d'intensité  $I$ . On considère ici encore que, dans l'hypothèse de régimes lentement variables, le cas d'un courant d'intensité variable au cours du temps est assimilable au cas d'un courant d'intensité constante. Soit un point  $M$  situé sur l'axe de la spire, de coordonnée  $x$  et tel que du point  $M$  la spire soit vue sous l'angle  $\alpha$ .



6. En utilisant les propriétés de symétrie de la distribution de courant, déterminer la direction et le sens du champ magnétique créé par cette spire au point  $M$ . Reproduire succinctement le schéma précédent et représenter la direction et le sens du champ magnétique créé au point  $M$ .

Le champ magnétique créé en un point  $M$  de l'axe de la spire est donné par l'expression:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha = B_0 \sin^2 \alpha$$

où  $\alpha$  représente l'angle sous lequel la spire est vue depuis le point  $M$  et  $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$ .

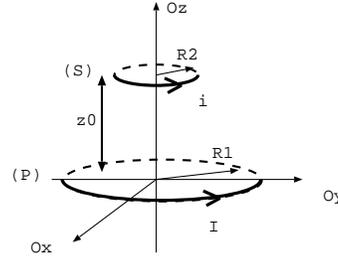
7. Etablir l'expression de  $B$  au point  $M$  en fonction de  $B_0$ ,  $R$  et  $x$ ,  $x$  représentant la distance entre le point  $O$  et le point  $M$ .

Pour des distances  $x$  petites par rapport au rayon de la spire, un développement limité permet de montrer que l'expression du champ  $B$  au point  $M$  est donnée par  $B = B_0(1 - \frac{3x^2}{2R^2})$ .

8. Quelle valeur maximale de  $x$  permet de considérer que le champ  $B$  est égal à  $B_0$  à 10 % près. On exprimera  $x$  en fonction de  $R$ .

### Chauffage par induction

Une plaque à induction comporte une bobine (P) de rayon  $R_1$  permettant de créer un champ magnétique. La bobine (P) est parcourue par un courant sinusoïdal d'intensité  $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$  et de fréquence  $f = 60 \text{ kHz}$ . On modélise la casserole métallique posée sur la plaque par une spire (S) circulaire de rayon  $R_2 < R_1$ . Elle est parcourue par un courant d'intensité  $i(t)$ .



On considère les hypothèses simplificatrices suivantes :

- la casserole posée sur la plaque à induction est à une distance  $z_0$  de la bobine
- le champ magnétique auquel est soumis la casserole est uniforme et son expression est donnée par :  $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$  où  $B_0$  est une constante
- la spire (S) a une résistance électrique  $R$  et son inductance propre est négligée.

9. Déterminer l'expression du flux  $\phi$  du champ magnétique qui traverse la spire (S). En déduire l'expression de la force électromotrice induite  $e$  apparaissant dans la spire (S).

10. Déterminer l'expression du courant induit  $i(t)$  dans la spire.

11. Déterminer l'expression de la puissance instantanée  $P(t)$  dissipée par effet Joule dans la spire (S). En déduire la puissance moyenne  $P_{moy}$  dissipée par effet Joule dans la spire (S).

12. Par quel phénomène physique l'énergie thermique transmise au fond de la casserole par effet Joule est-elle transmise au contenu de la casserole ?

13. Citer un intérêt d'une plaque à induction par rapport à une plaque de cuisson électrique fonctionnant à l'aide d'une résistance électrique.

14. Déterminer l'ordre de grandeur des longueurs que  $R_1$ ,  $R_2$  et  $z_0$  ne doivent pas dépasser pour permettre de considérer que l'approximation des régimes quasi-stationnaires est justifiée. Commenter.

Une poêle en acier est posée sur la plaque à induction en fonctionnement. On s'intéresse à présent à la conduction thermique au sein du manche en acier de la poêle. Ce dernier a une longueur  $L = 20 \text{ cm}$  et est modélisé par un cylindre.



Le champ de température est de la forme  $T(x, t)$ . L'équation de la diffusion thermique à une dimension en coordonnées cartésiennes s'écrit:  $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T$ .

15. En utilisant l'équation précédente, justifier qualitativement l'irréversibilité du phénomène de diffusion thermique.

Soit  $\tau$  la durée caractéristique du phénomène de diffusion thermique.

16. En expliquant la démarche suivie, déterminer un ordre de grandeur de cette durée  $\tau$ . Commenter.