Correction

I. **Détatouage par laser**

1. Les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent:

Maxwell Ampère: $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$

Maxwell Faraday: $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$

Maxwell Gauss: $\text{div}\overrightarrow{E} = 0$

Maxwell Thomson: $\text{div}\overrightarrow{B} = 0$

2. On écrit de deux manières différentes $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E})$.

Soit $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{\text{rot}}(-\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}) = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B}) = -\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2}$.

Soit $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}\text{div}\overrightarrow{E} - \Delta\overrightarrow{E} = -\Delta\overrightarrow{E}$.

On en déduit donc l'équation de propagation de type d'Alembert $\Delta\overrightarrow{E} - \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$. La vitesse de propagation des ondes est donc $c = \sqrt{\dfrac{1}{\mu_0\epsilon_0}}$.

3. On remplace la solution proposée pour le champ électrique dans l'équation de propagation:

$\Delta\underline{\overrightarrow{E}} = -k^2\underline{\overrightarrow{E}}$

$\dfrac{\partial^2\underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2\underline{\overrightarrow{E}}$

D'où en remplaçant dans l'équation de d'Alembert, il vient $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$ et $k = \dfrac{\omega}{c}$.

4. L'équation de Maxwell Ampère est modifiée soit $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}$.

Et de même l'équation de propagation devient $\Delta\overrightarrow{E} - \mu_0\epsilon_0\underline{\epsilon_r}\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$ ou encore $\Delta\overrightarrow{E} - \dfrac{\underline{\epsilon_r}}{c^2}\dfrac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$

La relation de dispersion donne alors $\underline{k}^2 = \dfrac{\underline{\epsilon_r}\omega^2}{c^2}$.

5. Avec $\underline{k} = k' - jk''$, le champ électrique en notation complexe s'écrit $\underline{\overrightarrow{E}} = E_0e^{j(\omega t - k'x + jk''x)}\overrightarrow{u_y} = E_0e^{j^2k''x}e^{j(\omega t - k'x)}\overrightarrow{u_y} = E_0e^{-k''x}e^{j(\omega t - k'x)}\overrightarrow{u_y}$.

En notation réelle on obtient $\overrightarrow{E} = \mathcal{R}e(\underline{\overrightarrow{E}}) = E_0e^{-k''x}\cos(\omega t - k'x)\overrightarrow{u_y}$.

On reconnaît le terme de phase $\omega t - k'x$ qui caractérise une propagation selon $+Ox$

Et le terme $E_0e^{-k''x}$ désigne l'amplitude de l'onde qui diminue quand x augmente soit qui diminue quand l'onde se propage.

L'onde est absorbée par le milieu dans lequel elle se propage.

6. Pour ϵ_r réel positif, la relation $\underline{k}^2 = \dfrac{\underline{\epsilon_r}\omega^2}{c^2}$ donne $k = \sqrt{\epsilon_r}\dfrac{\omega}{c} = k'$ soit $k'' = 0$.

k est donc un réel positif, l'onde se propage selon $+Ox$ sans être absorbée, son amplitude est constante.

7. k'' intervient dans le terme d'amplitude $e^{-k''x}$. Il fait donc apparaître une longueur caractéristique appelée épaisseur de peau égale à $\delta = \dfrac{1}{k''}$, c'est la distance sur laquelle l'onde se propage dans le milieu. Plus k'' est petit et plus δ, la profondeur de pénétration de l'onde dans le milieu est grande, ici on cherche justement à ce que l'onde atteigne les pigments sans endommager la peau donc on cherche avoir δ grand soit k'' petit.

Pour l'eau, il faut utiliser des longueurs d'onde inférieures à 900 nm. Pour la mélanine, il faut utiliser des longueurs d'onde les plus grandes possibles. Pour l'oxyhémoglobine, il faut utiliser une longueur d'onde de 700 nm.

8. On utilise la notation complexe $\underline{\overrightarrow{E}} = e^{j((\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{OM})}\overrightarrow{E_0}$

On applique l'équation de Maxwell Faraday: $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ avec en notation complexe $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\underline{\overrightarrow{E}} = -j\overrightarrow{k}\Lambda\underline{\overrightarrow{E}}$ et $\dfrac{\partial \underline{\overrightarrow{B}}}{\partial t} = j\omega\underline{\overrightarrow{B}}$. On trouve donc la relation de structure $\underline{\overrightarrow{B}} = \dfrac{\overrightarrow{k}\Lambda\underline{\overrightarrow{E}}}{\omega}$.

Ici l'onde se propage selon $+Ox$ donc le vecteur d'onde s'écrit $\underline{\overrightarrow{k}} = (k' - jk'')\overrightarrow{u_x}$.

Le champ électrique s'écrit $\underline{\overrightarrow{E}} = E_0 e^{-k''x} e^{j(\omega t - k'x)}\overrightarrow{u_y}$.

On en déduit le champ magnétique en notation complexe: $\underline{\overrightarrow{B}} = \dfrac{(k' - jk'')}{\omega} E_0 e^{-k''x} e^{j(\omega t - k'x)}\overrightarrow{u_x}\Lambda\overrightarrow{u_y} = \dfrac{(k' - jk'')}{\omega} E_0 e^{-k''x} e^{j(\omega t - k'x)}\overrightarrow{u_z} = \dfrac{k'}{\omega} E_0 e^{-k''x} e^{j(\omega t - k'x)}\overrightarrow{u_z} - \dfrac{jk''}{\omega} E_0 e^{-k''x} e^{j(\omega t - k'x)}\overrightarrow{u_z}$.

On trouve le champ magnétique en notation réelle en prenant la partie réelle du champ magnétique complexe.

Avec $\mathcal{R}e(e^{j(\omega t - k'x)} = \cos(\omega t - k'x)$

Avec $\mathcal{R}e(je^{j(\omega t - k'x)} = -\sin(\omega t - k'x)$

On a donc $\overrightarrow{B} = \dfrac{k'}{\omega} E_0 e^{-k''x}\cos(\omega t - k'x)\overrightarrow{u_z} + \dfrac{k''}{\omega} E_0 e^{-k''x}\sin(\omega t - k'x)\overrightarrow{u_z}$.

9. Le vecteur de Poynting est défini par $\overrightarrow{R} = \dfrac{\overrightarrow{E}\Lambda\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \dfrac{1}{\mu_0} E_0 e^{-k''x}\cos(\omega t - k'x)\overrightarrow{u_y}\Lambda[\dfrac{k' e^{-k''x} E_0}{\omega}\cos(\omega t - k'x) + \dfrac{k'' e^{-k''x} E_0}{\omega}\sin(\omega t - k'x)]\overrightarrow{u_z} = \dfrac{E_0 e^{-k''x}}{\mu_0}[\dfrac{k' e^{-k''x} E_0}{\omega}\cos^2(\omega t - k'x) + \dfrac{k'' e^{-k''x} E_0}{\omega}\sin(\omega t - k'x)\cos(\omega t - k'x)]\overrightarrow{u_x}$.

La valeur moyenne de $\cos^2(\omega t - k'x)$ est $1/2$.

La valeur moyenne de $\sin(\omega t - k'x)\cos(\omega t - k'x)$ est nulle.

On a donc pour la valeur moyenne du vecteur de Poynting $<\overrightarrow{R}> = \dfrac{E_0 e^{-k''x}}{2\mu_0}\dfrac{k' e^{-k''x} E_0}{\omega}\overrightarrow{u_x} = \dfrac{k' E_0^2 e^{-2k''x}}{2\mu_0\omega}\overrightarrow{u_x}$.

10. Le système élémentaire de pigment compris entre x et $x + dx$ reçoit la puissance $P = \displaystyle\iint <\overrightarrow{R}> dS\overrightarrow{n}$ où $\overrightarrow{n}$ est orienté vers l'intérieur du système pour compter ce que le système reçoit. Ainsi en x, on a $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u_x}$ et en $x + dx$, on a $\overrightarrow{n} = -\overrightarrow{u_x}$.

Ainsi la puissance reçue est $P = <\overrightarrow{R}(x)> S\overrightarrow{u_x} + <\overrightarrow{R}(x+dx)> S(-\overrightarrow{u_x}) = (R(x) - R(x+dx))S = \dfrac{-dR}{dx}Sdx$ avec $R(x) = \frac{k' E_0^2 e^{-2k''x}}{2\mu_0\omega}$ soit $\dfrac{dR}{dx} = \dfrac{-2k''k' E_0^2 e^{-2k''x}}{2\mu_0\omega}$.

Ainsi la puissance reçue est $P = \dfrac{k''k' E_0^2 e^{-2k''x}}{\mu_0\omega}Sdx$ d'où la puissance reçue par unité de volume $p_v(x) = \dfrac{P}{Sdx} = \dfrac{k''k' E_0^2 e^{-2k''x}}{\mu_0\omega}$.

11. On a $\dfrac{p_v(x = L_p)}{p_v(x = 0)} = e^{-2k''L_p} = 0,9$ avec $L_p = 1\ \mu m$ et $k'' = 5.10^4\ m^{-1}$ ainsi la puissance varie très peu à l'intérieur du pigment on peut la considérer uniforme.

12. La loi de Fourier s'écrit $\overrightarrow{j} = -\lambda_p\overrightarrow{\mathrm{grad}}T$, elle signifie que la chaleur diffuse des fortes vers les faibles températures.

13. Soit le cylindre élémentaire de pigment d'axe de révolution (Ox) compris entre x et $x + dx$ et de section S. On lui applique le premier principe de la thermodynamique entre les instants t et $t + dt$: $dU = Sdx\rho_p c_p(T(x, t + dt) - T(x, t)) = \delta W + \delta Q$.

avec $\delta W = 0$ et $\delta Q = j(x, t)Sdt - j(x + dx, t)Sdt + p_v dtSdx = -\dfrac{\partial j}{\partial x}Sdxdt + p_v Sdtdx$.

On a donc $dU = Sdx\rho_p c_p\dfrac{\partial T}{\partial t}dt = -\dfrac{\partial j}{\partial x}Sdxdt + p_v Sdtdx$ soit après simplification par $Sdxdt$ et par application de la loi de Fourier $j = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}$: $\rho_p c_p\dfrac{\partial T}{\partial t} = -\dfrac{\partial j}{\partial x} + p_v = \lambda_p\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + p_v$

14. En ne gardant que les termes relatifs à la diffusion on a $\rho_p c_p\dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda_p\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ soit par analyse dimensionnelle

$\rho_p c_p \dfrac{T}{t} = \lambda_p \dfrac{T}{x^2}$ d'où le temps de diffusion τ sur une distance de l'ordre de L_p: $\tau = \dfrac{\rho_p c_p L_p^2}{\lambda_p} = 5.10^{-8}\ s$.

15. La durée de l'impulsion laser est courte devant le temps de diffusion donc on peut supposer que la diffusion n'a pas le temps de se faire pendant la durée de l'impulsion. Ainsi dans l'équation de diffusion $\rho_p c_p \dfrac{\partial T}{\partial t} = \lambda_p \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + p_v$ on peut négliger le terme de diffusion $\lambda_p \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ devant le terme lié à l'onde laser p_v soit à résoudre $\rho_p c_p \dfrac{\partial T}{\partial t} = p_v$

On intègre par rapport au temps pour avoir $T(t)$ soit $T(t) = \dfrac{p_v}{\rho_p c_p} t + T(t=0)$.

16. La température à la fin de l'impulsion laser est la température au temps $t = 1\ ns$.

On a $T(t = 10^{-9}) = 2030^0C$: le pigment n'atteint pas cette température, il est déstructuré avant.