Interrogation ondes em

A1)

a- RFD appliquée à un électron : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{m\vec{g}}_{\text{négligé}} - e\vec{E} - \underbrace{e\vec{v}\wedge\vec{B}}_{\text{négligé}} - \frac{m\vec{v}}{\tau}$

en notation complexe : $j\omega m\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}} - \frac{m}{\tau}\underline{\vec{v}}$

d'où $\boxed{\underline{\vec{v}} = \frac{-e\vec{E}}{\frac{m}{\tau} + jm\omega} = \frac{-\frac{e\tau}{m}}{1+j\omega\tau}\vec{E}}$

---

b- Les cations sont très lourds par rapport aux électrons, on les considère quasi immobiles, ils n'ont pas de contribution au courant électrique.

---

c- Par définition : $\underline{\vec{J}} = -en\underline{\vec{v}} = \frac{\frac{ne^2\tau}{m}}{1+j\omega\tau}\vec{E}$

on reconnaît la loi d'Ohm de la forme $\underline{\vec{J}} = \underline{\sigma}\,\underline{\vec{E}}$ avec $\underline{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1+j\omega\tau}$

et $\boxed{\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}}$: conductivité du métal en régime continu (à basse fréquence)

---

d- Le nbre d'électrons libres (qui assurent la conduction) est égal au nbre d'atomes puisque chaque atome d'or libère un électron soit :

$n = \frac{N}{V}$ avec $N = \frac{m}{M}\times N_a$: le nbre d'atomes dans le volume V

d'où $\boxed{n = \underbrace{\frac{m}{V}}_{\text{masse volumique}}\frac{N_a}{M} = \boxed{\frac{\mu N_a}{M}}}$ AN : $n = 5{,}9.10^{28}$ électrons.m^{-3}

$\tau = \frac{m\sigma_0}{ne^2} = 2{,}7.10^{-14}$ s

l'énoncé donne $\lambda = 1050$ nm or $\lambda = \frac{c}{f}$ donc $f = \frac{c}{\lambda} = 2{,}86.10^{14}$ Hz

On compare les termes du dénominateur de $\underline{\sigma}$ soit 1 et $\omega\tau$:

$\omega\tau = 2\pi f\times\tau = 2\pi\times 2{,}86.10^{14}\times 2{,}7.10^{-14} = 48{,}5 \gg 1$

donc $1+j\omega\tau$ est voisin de $j\omega\tau$ d'où $\boxed{\underline{\sigma} \simeq \frac{\sigma_0}{j\omega\tau} = -j\frac{\sigma_0}{\omega\tau}}$

A2)

a - Équations de Maxwell Gauss : $\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon = 0$ densité volumique de charge supposée nulle !

Maxwell flux : $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

Maxwell Faraday : $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwell Ampère : $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

---

b - On a $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E}$

d'où $\vec{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\right) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\Delta\vec{E}$ avec $\underline{\vec{J}} = \underline{\sigma}\,\underline{\vec{E}}$

d'où $\boxed{\Delta\underline{\vec{E}} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} - \mu_0 \underline{\sigma} \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = \vec{0}}$ pour $\sigma = 0$ on retrouve une éq. de d'Alembert avec $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon}}}$

---

c - En notation complexe : $\Delta\underline{\vec{E}} = -k^2 \underline{\vec{E}}$ $\quad \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{\vec{E}}$ $\quad \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = j\omega \underline{\vec{E}}$

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 \underline{\sigma} j\omega = 0$$

soit $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 j\omega \underline{\sigma} = \frac{\omega^2}{c^2} + j^2 \mu_0 \frac{ne^2}{m} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{ne^2}{m\varepsilon c^2}$

$\underline{\sigma} = -j\frac{ne^2}{m\omega}$ $\quad \mu_0 = \frac{1}{c^2 \varepsilon}$

ou encore $\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$ avec $\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon}}}$

---

d - AN : $\omega_p = \left(\frac{5{,}9.10^{28} \times (1{,}6.10^{-19})^2}{9{,}01.10^{-31} \times 8{,}85.10^{-12}}\right)^{1/2} = 1{,}38.10^{16}$ rad.s^{-1}

$\omega = 2\pi f = 2\pi . 2{,}86.10^{14} = 1{,}8.10^{15}$ rad.s^{-1}

Comme propose l'énoncé on garde la solution avec $\mathrm{Im}(\underline{k}) <$

soit $\omega_p \gg \omega$ d'où $\underline{k}^2 \simeq -\frac{\omega_p^2}{c^2}$ et $\boxed{\underline{k} = \cancel{\pm} j \frac{\omega_p}{c}}$

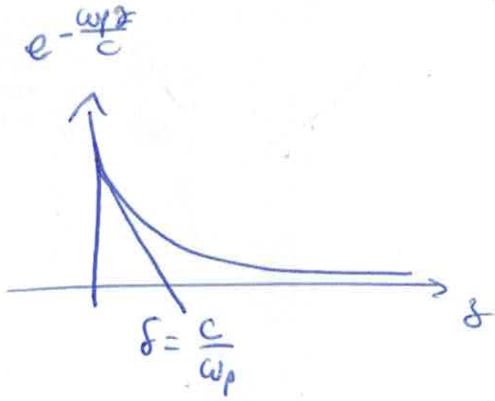
$\mathrm{Re}(\underline{k}) = 0 \Rightarrow$ pas de propagation

$\mathrm{Im}(\underline{k}) \neq 0 \Rightarrow$ il y a de l'absorption

C'est une onde stationnaire amortie appelée onde évanescente

On a $\vec{E} = \underline{E}(0)\, e^{j\left(\omega t - \left(-j\frac{\omega_p z}{c}\right)\right)} \vec{u}_x$

$$\boxed{\vec{E} = \underline{E}(0)\, e^{j\omega t} \times e^{-\frac{\omega_p z}{c}}\, \vec{u}_x}$$



t et z ne sont pas dans le $\hat{m}$ terme : pas de propagation

l'amplitude décroît en $e^{-\frac{\omega_p z}{c}}$

e - On a $\delta = \frac{c}{\omega_p} = \frac{3.10^8}{1{,}38.10^{16}} = \underline{2{,}2.10^{-8}\ m}$ pour $z \geq 5\delta$, l'amplitude de l'onde est nulle.

B1) On applique $\vec{rot}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ soit $-j\, \underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} = -j\omega \underline{\vec{B}}$.

d'où $\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$

pour l'onde incidente : $\vec{k}_i = \frac{\omega}{c} \vec{u}_z$

$$\boxed{\underline{\vec{B}}_i = \frac{\vec{u}_z \wedge E_0\, e^{j\left(\omega t - \frac{\omega z}{c}\right)} \vec{u}_x}{c} = \frac{E_0}{c}\, e^{j\left(\omega t - \frac{\omega z}{c}\right)} \vec{u}_y}$$

pour l'onde réfléchie : $\vec{k}_r = -\frac{\omega}{c} \vec{u}_z$

$$\boxed{\underline{\vec{B}}_r = \frac{-\vec{u}_z \wedge r E_0\, e^{j\left(\omega t + \frac{\omega z}{c}\right)} \vec{u}_x}{c} = -\frac{r E_0}{c}\, e^{j\left(\omega t + \frac{\omega z}{c}\right)} \vec{u}_y}$$

B2) On écrit la continuité du champ électromagnétique en $z = 0$

$\vec{E}_i(z=0,t) + \vec{E}_r(z=0,t) = \vec{E}_t(z=0,t)$

donc $\boxed{E_0 + E_0 r = E_t}$

$\vec{B}_i(z=0,t) + \vec{B}_r(z=0,t) = \vec{B}_t(z=0,t)$

donc $\boxed{E_0 - r E_0 = -j\, E_t \frac{\omega_p}{\omega}}$

d'où

$\cancel{E_0}(1 - r) = \cancel{E_0}(1 + r)\left(-j\frac{\omega_p}{\omega}\right)$

soit $\boxed{r = \frac{1 + j\frac{\omega_p}{\omega}}{1 - j\frac{\omega_p}{\omega}}}$

$|r| = 1$ donc les ondes réfléchie et incidente ont même amplitude mais sont déphasées

On élimine Et dans les équations, c'est l'amplitude de l'onde transmise (équivalent de E0 tau dans certains exercices)