

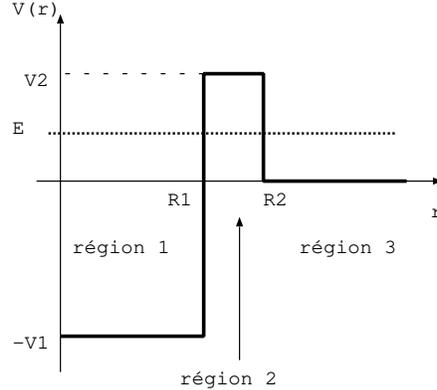
Interrogation de mécanique quantique

I. Barrière de potentiel

Une particule d'énergie E et de masse m est soumise à un potentiel V , tel que : $V = -V_1$ pour la région 1 où $0 < r < R_1$, $V = V_2$ pour la région 2 où $R_1 < r < R_2$ et $V = 0$ pour la région 3 où $r > R_2$.

La particule d'énergie E arrive de la région 1 et se déplace selon $+\vec{e}_r$. Nous considérons que : $0 < E < V_2$. Nous rappelons que la fonction d'onde radiale $\phi(r)$ de la particule définie à partir de la fonction d'onde par $\psi(r, t) = \phi(r)e^{-iEt/\hbar}$ vérifie l'équation de Schrödinger en régime stationnaire à une dimension :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi}{dr^2}(r) + V(r)\phi(r) = E\phi(r)$$



1. Montrer que du point de vue classique il existe une zone interdite à préciser.
2. Montrer que la fonction d'onde radiale $\phi(r)$ se met, selon la région, sous la forme :

Région 1 : $\phi_1(r) = \underline{A}e^{jk_1r} + \underline{B}e^{-jk_1r}$

Région 2 : $\phi_2(r) = \underline{C}e^{k_2r} + \underline{D}e^{-k_2r}$

Région 3 : $\phi_3(r) = \underline{F}e^{jk_3r} + \underline{G}e^{-jk_3r}$

où A, B, C, D, F et G sont des constantes a priori complexes et j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$. Préciser les expressions des constantes k_1 , k_2 et k_3 . Pour la région 2, de quel type d'onde parle-t-on ?

3. Quelle est la valeur de la constante \underline{G} ? Justifier votre réponse.
4. Ecrire les relations de continuité entre les fonctions ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ_3 (sans chercher à remplacer par leurs expressions).
5. On montre que le courant de probabilité stationnaire de la région 1 a pour expression : $\vec{J}_1 = \frac{\hbar}{m_\alpha} k_1 (|\underline{A}|^2 - |\underline{B}|^2) \vec{e}_r$ où \vec{e}_r est le vecteur unitaire.

Que représente la quantité $\vec{J} = \frac{\hbar}{m} k_1 |\underline{A}|^2 \vec{e}_r$? $\vec{J} = -\frac{\hbar}{m} k_1 |\underline{B}|^2 \vec{e}_r$?

Définir le coefficient de transmission T de la barrière de potentiel en fonction des courants de probabilité. Exprimer T en fonction de $|\underline{A}|$, $|\underline{F}|$, k_1 et k_3 .

6. On trouve $T \approx 10^{-20}$. Conclure.

II. Interférences d'ondes de matière

Données:

constante de Planck: $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$

constante de Planck réduite: $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$

vitesse de la lumière dans le vide: $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

charge élémentaire: $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Constante de Boltzmann: $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$

masse de l'électron: $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

constante des GP: $R = 8,3 \text{ SI}$

constante d'Avogadro: $N_a = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

1. **1.a.** Après avoir rappelé la formule de De Broglie, établir la longueur d'onde associée à un faisceau d'électrons accélérés par une différence de potentiel égale à $U = 100 \text{ V}$.

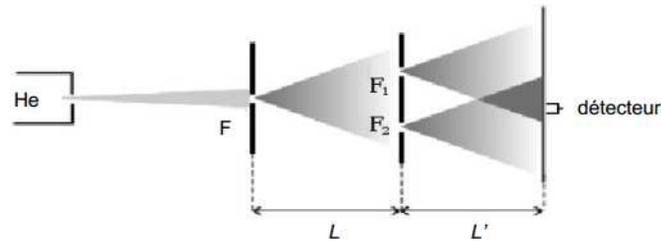
- 1.b.** La résolution d'un microscope est égale à la longueur d'onde. Pourquoi un microscope

électronique a-t-il un meilleur pouvoir de résolution qu'un microscope optique conventionnel?

Après la réalisation d'interférences avec des électrons et des neutrons, des expériences historiques d'interférences avec des atomes ont été réalisées en 1991 avec de l'Hélium par Carnel et Mlynek à Constance et en 1992 avec du Néon par Shimizu et Takuma à Tokyo.

2. Etablir l'expression quadratique moyenne u d'un atome de masse m à la température T .

Dans l'expérience de 1991, la source est un dispositif d'émission thermique d'atomes d'hélium He suivie d'une fente diaphragme F. Le montage est celui d'une division du front d'onde de type fentes d'Young. Le plan de la double fente est placé à la distance $L = 64 \text{ cm}$ de la fente F et à la distance $L' = 64 \text{ cm}$ du plan le long duquel est déplacé le détecteur qui comptabilise les impacts de particules. Les atomes d'hélium sont émis soit à la température $T_1 = 295 \text{ K}$, soit à la température $T_2 = 83 \text{ K}$. Donnée: masse molaire de l'hélium $M = 4 \text{ g/mol}$.



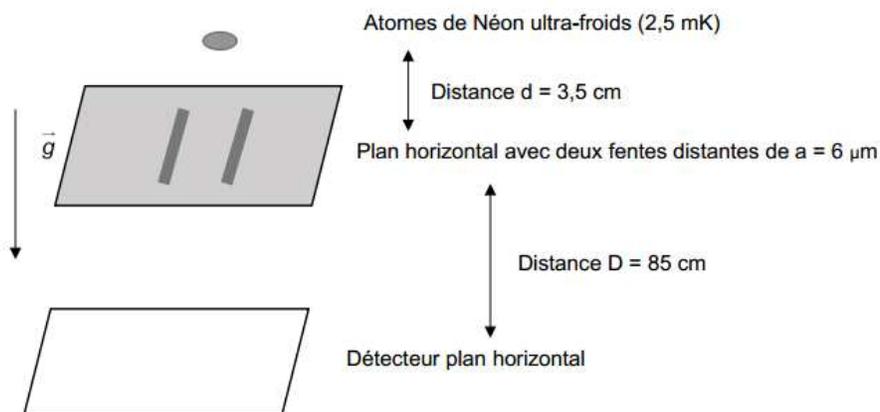
3. **3.a.** On admet qu'il y a diffraction du faisceau de particules au passage par F, puis par les fentes F1 et F2, c'est-à-dire ouverture angulaire du faisceau d'un angle voisin de $2\lambda/\epsilon$ avec ϵ la largeur de fente. La largeur de la fente F vaut $2 \mu\text{m}$ et celles des fentes F1 et F2 valent $1 \mu\text{m}$. La distance entre elles vaut $a = 8 \mu\text{m}$. Vérifier (uniquement à la température T_1) que les chemins d'amplitude de probabilité permettent d'envisager deux chemins différents des particules avant leur détection.

3.b. Le détecteur met en évidence des droites parallèles équidistantes sur lesquelles le nombre des impacts est très élevé et entre ces droites, des zones quasiment sans impacts. Interpréter.

3.c. Estimer la distance entre ces droites à la température T . Comment évolue cette distance quand la température diminue? Faire l'application numérique pour T_1 .

4. L'expérience de 1992 est aussi un dispositif interférentiel de fentes d'Young, mais on utilise le champ de pesanteur pour accélérer les atomes de Néon. Donnée: masse molaire du néon: $M = 20 \text{ g/mol}$.

Les atomes de Néon, supposés indépendants les uns des autres, sont lâchés sans vitesse initiale et tombent dans le champ de pesanteur $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.



4.a. On mesure un interfrange de $1,1 \text{ mm}$: que vaut la longueur d'onde associée? Quelle valeur de la vitesse en déduisez-vous au niveau du détecteur?

4.b. En appliquant les lois de la mécanique classique, évaluer la vitesse des particules en chute libre au niveau des fentes. Que vaut-elle au niveau du détecteur? Commenter.

4.c. Pourquoi a-t-on utilisé des atomes ultra-froids?