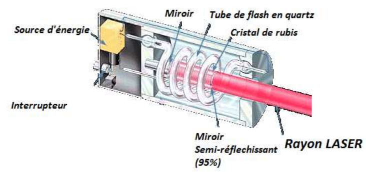
TD 2 physique quantique

I. Laser à rubis



Un laser à rubis émet une radiation de longueur d'onde $\lambda = 694,3\ nm$. On admet que cette émission est due à la transition $2 \to 1$ d'un électron confiné dans un puits infini de largeur a. Données : $m_e = 9.10^{-31}\ kg$, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 10^{-34}\ J.s$ et

1. Préciser la nature des fonctions d'onde de l'électron dans le puits infini. Déduire de la représentation graphique de ces ondes la relation donnant les longueurs d'onde de De Broglie de l'électron dans ce puits et en déduire ses énergies possibles.

2. Exprimer l'énergie libérée par l'électron qui effectue la transition $2 \to 1$. Déduire de la longueur d'onde de la lumière émise par le laser, la valeur numérique de a.

Réponse: $a = 8.10^{-10}\ m$

II. Particule dans un puits infini

Une particule de masse m, d'énergie $E_n > 0$, se déplaçant selon Ox est soumise à un potentiel V telle que: $V = 0$ pour $0 < x < a$ et $V \to \infty$ pour $x < 0$ et $x > a$. On écrit, pour x compris entre 0 et a, les fonctions d'onde sous la forme $\psi_n(x,t) = \phi_n(x)e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$. On donne l'équation de Schrödinger $i\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t)$. Donnée : $h = 6,6.10^{-34}\ J.s$.

1. Donner la fonction d'onde pour $x < 0$ et $x > a$.

2. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $\phi_n(x)$ et la résoudre. Qu'appelle-t-on normaliser une fonction d'onde? Déterminer entièrement $\phi_n(x)$ et représenter pour $n = 1, 2$ et 3, les fonctions $\phi_n(x)$ et $|\psi_n(x,t)|^2$. On donne $\displaystyle\int_0^a \sin^2(\frac{n\pi x}{a}) = \frac{a}{2}$.

3. Exprimer E_n. Que se passe-t-il si a diminue?

4. A l'instant $t = 0$, la fonction d'onde de la particule s'écrit $\underline{\psi}(x, t = 0) = A\sin(\dfrac{3\pi x}{a})$. Exprimer $\underline{\psi}(x,t)$.

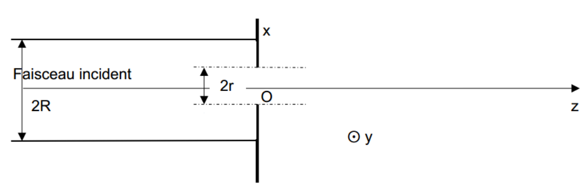
5. A l'instant $t = 0$, la fonction d'onde de la particule s'écrit $\underline{\psi}(x, t = 0) = C\sin(\dfrac{\pi x}{a}) + D\sin(\dfrac{2\pi x}{a}))$. Exprimer $\underline{\psi}(x,t)$. Montrer que la particule oscille entre deux niveaux d'énergie, et exprimer la pulsation des oscillations.

6. Evaluer E_1 pour un proton dans un noyau et pour un électron dans un atome. Données : $m_e = 9.10^{-31}\ kg$, $m_p \approx 1000 m_e$, $\hbar = 10^{-34}\ J.s$.

Réponses : $\phi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin(\dfrac{n\pi x}{a})$ *et* $E_n = \dfrac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$

III. Diffraction

Un faisceau parallèle cylindrique de rayon R de longueur d'onde λ arrive face à un écran, perpendiculaire à l'axe du faisceau, percé d'un trou circulaire T_1 de centre O et de rayon r (inférieur à R).



1. Rappeler pour un photon l'expression de sa quantité de mouvement p en fonction de sa longueur d'onde λ.

2. Établir, à partir de l'inégalité d'Heisenberg spatiale, qu'il y a forcément ouverture angulaire du faisceau.

3. Exprimer cette ouverture angulaire supposée petite. Commenter. Comment appelle-t-on ce phénomène ?

Réponses: 1- $p = \dfrac{E}{c}$ *3-* $\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{a}$

IV. **Champ de force appliqué à une particule**

On considère une particule quantique astreinte à se déplacer sur l'axe Ox et soumise au champ de force $\overrightarrow{F} = F(x)\overrightarrow{e_x}$ dont on cherche à déterminer l'expression. On donne la fonction d'onde de la particule: $\underline{\psi}(x,t) = Ae^{-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar}}e^{-i\frac{\omega_0 t}{2}}$ avec ω_0 et A deux constantes.

On rappelle l'équation de Schrödinger $i\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + U(x)\psi(x,t)$.

1. Donner les unités de ω_0 et A.

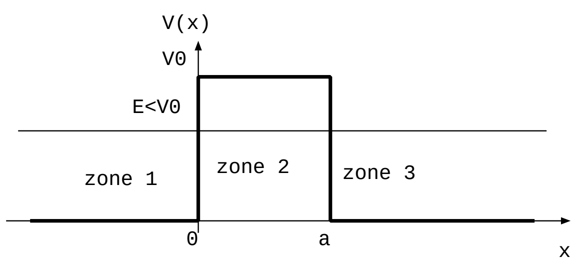
2. Déterminer A. Donnée: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha u^2}du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ pour $\alpha > 0$.

3. Déterminer $U(x)$, le potentiel de la particule et en déduire le champ de force $\overrightarrow{F}$. Commenter.

Réponses: $A = (\dfrac{m\omega_0}{\pi\hbar})^{1/4}$ *et* $U(x) = \dfrac{m\omega_0^2 x^2}{2}$

V. **Effet tunnel**

Soit une particule de masse m et d'énergie E, venant de $-\infty$ et soumise au potentiel $V(x)$ suivant:



La recherche d'états stationnaires $\psi(x,t) = \phi(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ solutions de l'équation de Schrödinger:
$i\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t)$ conduit à:

$\phi_1(x) = \underline{A}_1 e^{ikx} + \underline{A}_2 e^{-ikx}$

$\phi_2(x) = \underline{B}_1 e^{k'x} + \underline{B}_2 e^{-k'x}$

$\phi_3(x) = \underline{C}_1 e^{ikx} + \underline{C}_2 e^{-ikx}$

1. Montrer que du point de vue de la mécanique classique, la particule ne peut pas traverser la barrière de potentiel.

2. Exprimer k et k' en fonction de m, E, V_0 et $\hbar$.

3. Justifier le fait que $\underline{C}_2 = 0$.

4. On définit les coefficients $\underline{r} = \dfrac{\underline{A}_2}{\underline{A}_1}$ et $\underline{\tau} = \dfrac{\underline{C}_1}{\underline{A}_1}$. Que représentent ces coefficients?

5. Ecrire (sans les résoudre) les équations de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée par rapport à x.

On rappelle que pour une OPPH, le vecteur densité de courant s'écrit $\overrightarrow{j} = |\underline{\psi}|^2\dfrac{\hbar\overrightarrow{k}}{m}$.

6. Ecrire le vecteur densité de courant $\overrightarrow{j_i}$ de l'onde incidente et $\overrightarrow{j_t}$ de l'onde transmise par la barrière de potentiel. En déduire l'expression du coefficient de transmission de la particule $T = \dfrac{||\overrightarrow{j_t}||}{||\overrightarrow{j_i}||}$ en fonction de $\underline{A}_1$ et $\underline{C}_1$.

7. La source S émet les particules avec un débit $q_e = 10^5\ s^{-1}$. La résolution numérique conduit à $T = 0,04\ \%$. En déduire q_s, le débit de particules traversant la barrière de potentiel.

Réponses: 2- $k' = \sqrt{\dfrac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$ *et* $k = \sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}}$ *6-* $T = \dfrac{|\underline{C}_1|^2}{|\underline{A}_1|^2}$ *7-* $q_s = 40\ s^{-1}$

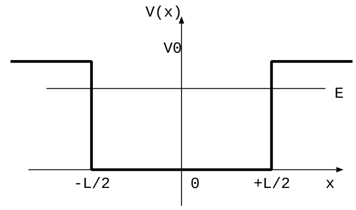
VI. **Puits de potentiel fini**

Une particule de masse m et d'énergie E est placée dans un puits de potentiel $V(x)$ tel que:

$V(x) = V_0 > 0$ pour $x < -L/2$ région 1 et pour $x > L/2$ région 3

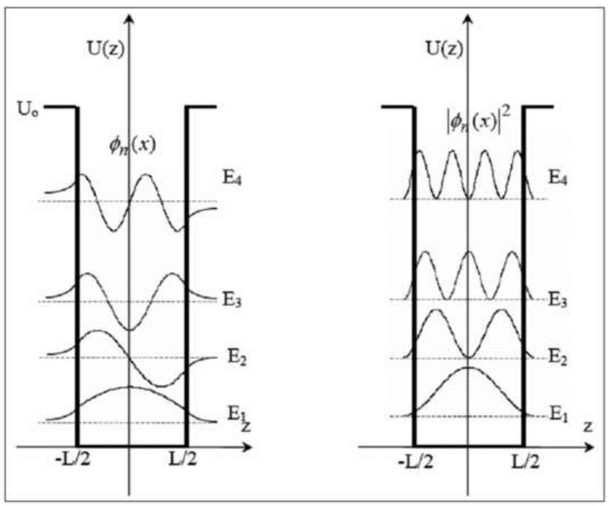
$V(x) = 0$ pour $-L/2 < x < L/2$ région 2

L'énergie de la particule est telle que $E < V_0$.



On cherche des états stationnaires sous la forme $\psi(x,t) = \phi(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$. On rappelle l'équation de Schrödinger $i\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t)$.

1. On donne pour un tel puits l'allure des fonctions d'onde et des probabilités de présence. Tracer de la même façon, les fonctions d'onde et des probabilités de présence d'une particule dans un puits de potentiel infini. Signalez les différences et les points communs de ces deux types de puits.



2. Etablir les équations différentielles vérifiées par $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ et $\phi_3(x)$.

3. La résolution de ces équations différentielles conduit à: $\phi_a(x) = A\cos(Kx) + B\sin(Kx)$, $\phi_b(x) = Ce^{kx}$ et $\phi_c(x) = De^{-kx}$.

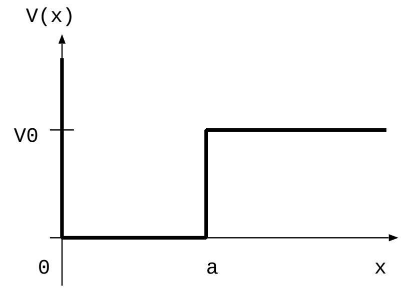
Préciser la région qui correspond à chacune de ces fonctions d'onde et exprimer k et K en fonction de m, E, $\hbar$ et U_0.

4. Ecrire les équations de continuité et vérifier la cohérence avec les schémas des fonctions d'onde données dans la question 1.

5. Commenter évolue le nombre de niveaux d'énergie lorsqu'on augmente V_0? Observe-t-on une quantification de l'énergie pour $E > V_0$?

VII. **Particule dans un puits semi-infini**

Soit un électron de masse m et d'énergie E décrit par une fonction d'onde $\underline{\psi}(x,t) = \phi(x)e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$ qui se déplace dans le puits de potentiel suivant:



$$x < 0 : V(x) \to \infty \text{ région 1}$$
$$0 < x < a : V(x) = 0 \text{ région 2}$$
$$x > a : V(x) = V_0 > 0 \text{ région 3}$$

Avec $0 < E < V_0$

On donne l'équation de Schrödinger $i\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x)\psi(x,t)$.

1. Préciser, en justifiant votre réponse, les valeurs de x accessibles pour l'électron dans le cadre de la mécanique classique.

2. Que dire de la fonction d'onde $\underline{\psi}_1(x,t)$ de l'électron dans la région 1?

3. Montrer que les parties spatiales des fonctions d'onde dans les régions 2 et 3 peuvent se mettre sous la forme $\underline{\phi}_2(x) = Ae^{ik_2x} + Be^{-ik_2x}$ et $\underline{\phi}_3(x) = Ce^{k_3x} + De^{-k_3x}$. Exprimer k_2 et k_3 en fonction des données et montrer que l'une des constantes A, B, C ou D est nulle.

4. Quelle(s) équation(s) de continuité peut-on écrire en $x = 0$? En déduire que $\phi_2(x)$ peut se mettre sous la forme $\phi_2(x) = A'\sin(k_2x)$.

5. Quelle(s) équation(s) de continuité peut-on écrire en $x = a$? En déduire que l'on a $\tan(k_2a) = -\dfrac{k_2}{k_3} < 0$.

6. On admet que les équations de continuité conduisent à la relation $|\sin(k_2a)| = \sqrt{\dfrac{\hbar^2}{2mV_0}}k_2$. On propose de déterminer graphiquement les valeurs de k_2 solutions de cette équation.

La courbe en annexe 1 est le résultat du code suivant:

```
V0,hbar,m,a=400*1.6E-19,1E-34,0.9E-31,2E-10
k2=np.linspace(.......,........,1000)
plt.plot(k2,np.abs(np.sin(k2*a)))
plt.xlabel('k2(m-1)')
plt.grid()
plt.show()
```

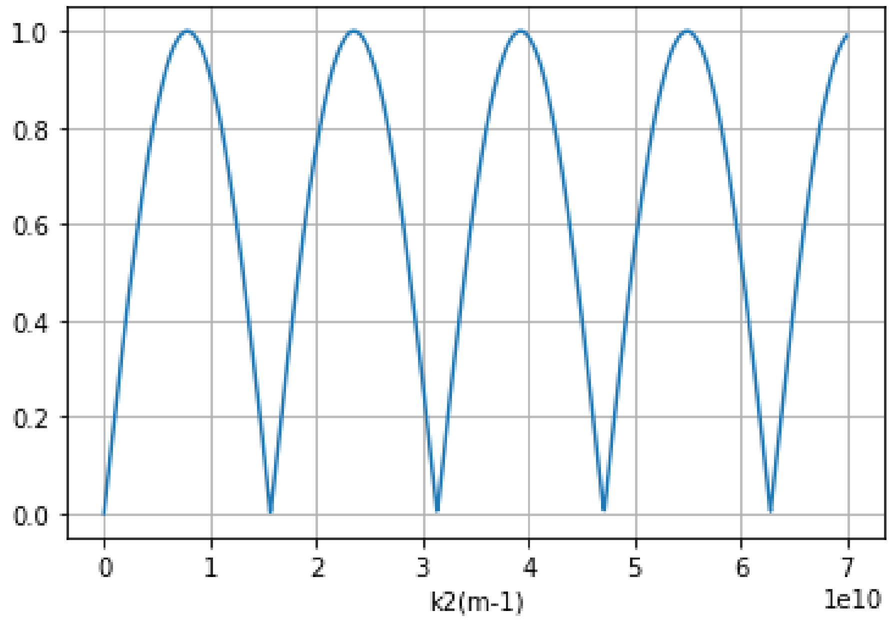
6.a. Déduire du code, les valeurs numériques de V_0, m et a.

6.b. On définit la fonction $g(k_2) = \sqrt{\dfrac{\hbar^2}{2mV_0}}k_2$. Ajouter en annexe 1 la courbe représentant g en fonction de k_2 pour un électron dans le puits de potentiel étudié. Déduire du graphe, les valeurs de k_2 solutions de l'équation $|\sin(k_2a)| = \sqrt{\dfrac{\hbar^2}{2mV_0}}k_2$.

6.c. La condition $\tan(k_2a) = -\dfrac{k_2}{k_3} < 0$ fait que certaines solutions trouvées précédemment sont à éliminer. On donne en annexe 2, la courbe représentant $\tan(k_2a)$ en fonction de k_2 (les droites verticales sur la courbe sont les asymptotes). Déduire des questions précédentes, les valeurs de k_2 puis les valeurs de l'énergie E possibles pour $V_0 = 400\ eV$.

6.d. Comment évolue le nombre d'énergies possibles lorsqu'on augmente V_0? Justifier en utilisant un raisonnement graphique.

Annexe 1:



Annexe 2: