I. **Correction**

1. On a $T(x=0,0) = T(x=L,0) = T_e = 50^0C$ et $T(x=L/2,0) = T_m = 400^0C$. Le barreau a pour longueur $L = 1$.

3 Nx,L=100,1

7 plt.plot(x,T0(50,400,x))

2. Pour $T = T(x,t)$, l'équation de diffusion s'écrit $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

Par analyse dimensionnelle on a $\tau = \dfrac{L^2}{D}$.

3. Expression de $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$:

$T(x+dx,t) = T(x,t) + dx\dfrac{\partial T}{\partial x} + \dfrac{dx^2}{2}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

$T(x-dx,t) = T(x,t) - dx\dfrac{\partial T}{\partial x} + \dfrac{dx^2}{2}\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

$T(x+dx,t) + T(x-dx,t) = 2T(x,t) + dx^2\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ d'où $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \dfrac{T(x+dx,t) + T(x-dx,t) - 2T(x,t)}{dx^2}$

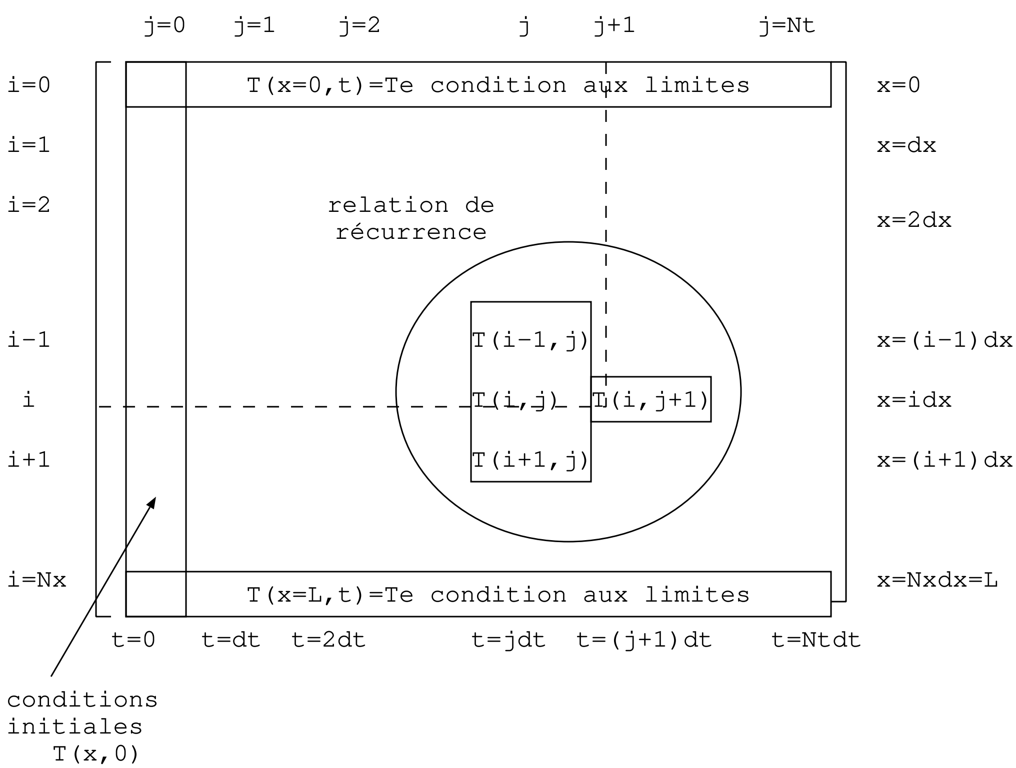
Expression de $\dfrac{\partial T}{\partial t}$:

$T(x,t+dt) = T(x,t) + dt\dfrac{\partial T}{\partial t}$ d'où $\dfrac{\partial T}{\partial t} = \dfrac{T(x,t+dt) - T(x,t)}{dt}$.

On remplace dans l'équation de diffusion: $\dfrac{\partial T}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ soit $\dfrac{T(x,t+dt) - T(x,t)}{dt} = \dfrac{D}{dx^2}(T(x+dx,t) + T(x-dx,t) - 2T(x,t))$.

On en déduit $T(x,t+dt) = T(x,t) + r(T(x+dx,t) + T(x-dx,t) - 2T(x,t))$ avec $r = \dfrac{Ddt}{dx^2}$.

4. La relation de récurrence s'écrit $tabT[i,j+1] = tabT[i,j] + r(tabT[i+1,j] + tabT[i-1,j] - 2tabT[i,j])$



5.

6.

13 D,tau=lamba/rho/c,L**2/D

17 r=dt*D/dx**2

Les valeurs numériques sont: $D = 7,67.10^{-7}\ m^2.s^{-1}$, $\tau = 1,30.10^6\ s$, $dx = 0,01\ m$, $dt = 13,03s$ et $r = 0,1 < 0,5$ vérifie le critère de convergence de la méthode d'Euler.

19 tabT[:,0]=T0(Te,Tm,Nx+1) : c'est la première colonne du tableau, ce sont les CI

20 tabT[0,:]=Te : c'est la première ligne du tableau, CL en $x = 0$, $T(x = 0, t) = T_e$

21 tabT[Nx,:]=T : c'est la dernière ligne du tableau, CL en $x = L$, $T(x = L, t) = T_e$

Les lignes 22 et 23 permettent de compléter la colonne j=1 du tableau grâce à la relation de récurrence.

7.

24 for j in range(1,Nt):

25 ——for i in range(1,Nx):

26 ————tabT[i,j+1]=tabT[i,j]+r*(tabT[i-1,j]+tabT[i+1,j]-2*tabT[i,j])

27 plt.plot(x,TabT[:,0])

28 for j in range(5):

29 ——plt.plot(x,tabT[:,j*3000])

On trace les courbes $T(x,t)$ aux instants $t = 0*3000*dt = 0\ s$, $t = 1*3000*dt = 39\ 090\ s$, $t = 2*3000*dt = 78\ 180\ s$, $t = 3*3000*dt = 117\ 270\ s$, $t = 4*3000*dt = 156\ 360\ s$.

Le transfert thermique diffuse du chaud vers le froid, les températures diminuent de façon non linéaire pour atteindre à l'équilibre la température T_e.

8. En abscisse c'est le temps entre 0 et $\tau = 1,30.10^6\ s$.

En ordonnée, c'est la température pour $i = 50$ soit $x_{50} = 50*dx = 0,5\ m$: au centre du cylindre

En ordonnée, c'est la température pour $i = 25$ soit $x_{25} = 25*dx = 0,25\ m$

La température décroit de façon non linéaire, jusqu'à atteindre $T_e = 50^0C$. Le phénomène n'est pas linéaire car d'après la loi de Fourier $\overrightarrow{j_Q} = -\lambda\overrightarrow{\text{grad}}T$, la diffusion est d'autant plus efficace que les différences de températures sont grandes. Or plus la diffusion se produit, plus les différences de températures sont faibles et donc moins la diffusion est efficace.

Au bout du temps τ, la température est bien homogène, cela valide l'analyse dimensionnelle.