Circulation sur route

I. Aide syntaxique sous python

Aide pour les graphes:

np.linspace(a,b,n) : permet de générer un tableau 1D de n flottants équirépartis dans l'intervalle $[a, b]$

plt.plot(x,y) permet de tracer un graphique de n points dont les abscisses sont contenus dans le tableau 1D x et les ordonnées dans le tableau 1D y, x et y ayant la même taille n

plt.title('titre') permet d'afficher le titre d'un graphique

plt.xlabel('nom') permet de légender l'axe des abscisses

plt.ylabel('nom') permet de légender l'axe des ordonnées

plt.grid() permet d'afficher une grille sur le graphe

plt.show() permet l'affichage d'un graphe

Aide pour les tableaux 2D:

np.zeros((n,)) crée un tableau 2D contenant n lignes et p colonnes ne contenant que des zéros. Les lignes sont numérotées de 0 à $n-1$ et les colonnes sont numérotées de 0 à $p-1$.

T[0,:] désigne la première ligne du tableau T

T[:,0] désigne la première colonne du tableau T

T[i,:] désigne la ligne i du tableau T

T[:,j] désigne la colonne j du tableau T

T[i,j] désigne le terme sur la ligne i et sur la colonne j

II. Résolution de l'équation de diffusion

On étudie la circulation sur une route à une seule voie confondue avec l'axe Ox. Les voitures sont identiques et ont pour longueur L_0.

On adopte un modèle continu pour décrire la circulation routière, cela revient donc à regarder l'évolution du trafic sur des distances grandes devant la longueur L_0 d'une voiture.

On utilise les notations suivantes:

$v(x,t)$ désigne la vitesse moyenne des véhicules à la position x à l'instant t. On considère que les véhicules se déplacent selon l'axe Ox dans le sens des x croissants.

$c(x,t)$ (en véhicules par mètre) désigne la concentration de véhicules par unité de longueur de route à l'instant t et à la position x. Sur une longueur L_0, il y a, au plus, un seul véhicule, soit $c(x,t) \leq c_{max} = \dfrac{1}{L_0}$.

$q(x,t)$ (en véhicules par seconde) désigne le débit de véhicules, c'est-à-dire le nombre de véhicules par unité de temps traversant la section de la route située à la position x.

1. Donner la relation entre $q(x,t)$, $c(x,t)$ et $v(x,t)$.

2. On considère le système élémentaire constitué de la portion d'autoroute comprise entre x et $x + dx$, on suppose qu'il n'y a ni perte, ni création de véhicules.

Exprimer $N(t)$ et $N(t + dt)$, le nombres de véhicules présents dans le système aux instants t et $t + dt$.

Exprimer δN_e et δN_s, les nombres de véhicules qui entrent et qui sortent du système entre les instants t et $t + dt$.

Déduire de la conservation du nombre de véhicules, l'équation aux dérivées partielles: $\dfrac{\partial c}{\partial t} = -\dfrac{\partial q}{\partial x}$ $(*)$.

Pour comprendre comment évoluent la concentration, la vitesse moyenne ou le débit de véhicules au cours du temps sur la route, il convient donc de résoudre cette équation aux dérivées partielles à partir de la situation initiale.

Afin de résoudre numériquement l'équation ($*$), nous avons besoin de discrétiser les variables de temps et d'espace. On choisit les paramètres suivants :

- pas d'espace (en mètres) : dx

- pas de temps (en secondes) : dt

- longueur de la portion de route étudiée : $Lr = N_x dx$

- durée de simulation : $Temps = N_t dt$

On introduit un tableau C des concentrations. Les termes de ce tableau sont de la forme $C[i,j] = C(x_i, t_j) = C(idx, jdt)]$, terme sur la ligne i et la colonne j.

Le tableau C comprend $N_x + 1$ lignes ($i = 0, 1, ..., N_x$) et $N_t + 1$ colonnes ($j = 0, 1, ...N_t$).

discrétisation en temps (indice j)

sens des temps croissants →

	colonne j-1 tj-1=(j-1)dt	colonne j tj=jdt	colonne j+1 tj+1=(j+1)dt
ligne i-1 xi-1=(i-1)dx	Ci-1,j-1	Ci-1,j	Ci-1,j+1
ligne i xi=idx	Ci,j-1	Ci,j	Ci,j+1
ligne i+1 xi+1=(i+1)dx	Ci+1,j-1	Ci+1,j	Ci+1,j+1

↓ discrétisation en espace (indice i) sens des x croissants

L'équation ($*$) possède deux inconnues. Il faut donc ajouter une deuxième équation pour pouvoir la résoudre.

3. Dans le modèle de Greenshield, que l'on utilise dans cette étude, la vitesse $v(x,t)$ est une fonction affine de la concentration $c(x,t)$.

- lorsque la concentration en véhicules tend vers 0, les conducteurs peuvent rouler à la vitesse ' maximale autorisée notée v_{max}

- lorsque les véhicules sont pare-choc contre pare-choc, la concentration est égale à c_{max}: les véhicules sont à l'arrêt.

Déduire de ces informations, l'expression de $v(t,x)$) en fonction de $c(t,x)$, c_{max} et v_{max}.

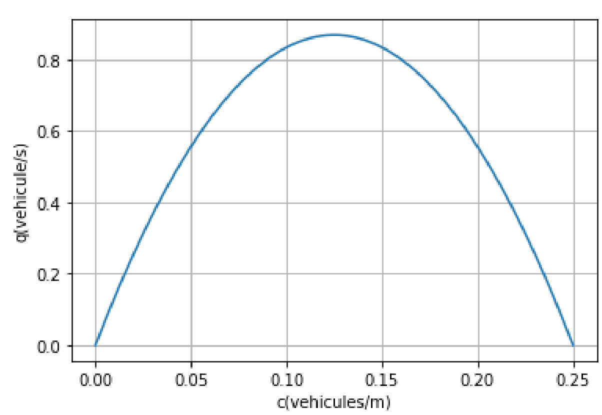
4. En déduire l'expression de $q(t,x)$ en fonction de $c(t,x)$. On donne le code suivant et le résultat de son exécution:

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

cmax,L0,vmax= instruction 1

def q(c):
    return -vmax/cmax*c**2+vmax*c

c=np.linspace(0,cmax,1000)
plt.plot(c,q(c))
plt.grid()
plt.xlabel('c(vehicules/m)')
plt.ylabel('q(vehicule/s)')
plt.show()
```



Ecrire sur votre copie l'instruction 1 en exploitant la courbe obtenue.

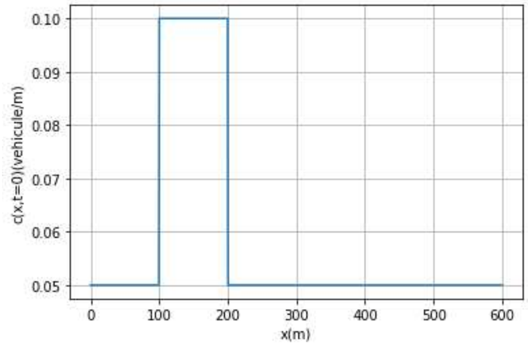
Commenter l'allure de la courbe.

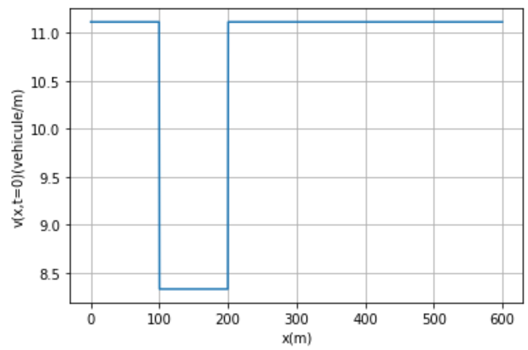
5. On étudie une situation particulière où la concentration de voitures et la vitesse des voitures sur la route à l'instant initial est donnée par le code et les graphes suivants:

```python
Temps,Lr=60,600
Nt,Nx=1000,1000
dx=Lr/Nx #pas d'esoace
dt=Temps/Nt #pas de temps
x1,x2= instruction 2
C=np.zeros((Nx+1,Nt+1))
for i in range(0,Nx+1):
    if i<x1/dx or i>x2/dx:
        C[i,0]=  instruction 3
    else:
        C[i,0]=  instruction 4

x=np.linspace(0,Lr,Nx+1)
plt.plot(x,C[:,0])
plt.grid()
plt.xlabel('x(m)')
plt.ylabel('c(x,t=0)(vehicule/m)')
plt.show()

plt.plot(x,   instruction 5   )
plt.grid()
plt.xlabel('x(m)')
plt.ylabel('v(x,t=0)(vehicule/m)')
plt.show()
```





Déduire de la lecture du code et de la courbe concentration à l'instant initial, les instructions 2, 3 et 4 (à écrire sur votre copie).

Ecrire sur votre copie l'instruction 5.

Commenter les courbes donnant la concentration de voitures et la vitesse des véhicules à l'instant $t = 0$ sur la portion de route étudiée et en déduire la portion de route où le débit de voitures est maximale.

On cherche à étudier l'évolution de la circulation au cours du temps pour les conditions initiales données précédemment en résolvant l'équation $(*)$ (question 2). La méthode de résolution est la méthode d'Euler.

6. Exprimer $\dfrac{\partial c}{\partial t}(x,t)$ en fonction de $c(x,t+dt)$, $c(x,t)$ et dt. En déduire l'expression de $\dfrac{\partial c}{\partial t}(x_i,t_j)$ en fonction de $C[i,j+1]$, $C[i,j]$ et dt.

7. On donne l'expression $\dfrac{\partial q}{\partial x}(x,t) = \dfrac{q(x+dx,t)-q(x-dx,t)}{2dx}$.

On associe au débit de voitures $q(x,t)$ un tableau Q tel que $q(x_i,t_j) = Q[i,j]$. Exprimer $\dfrac{\partial q}{\partial x}(x_i,t_j)$ en fonction de $Q[i+1,j]$, $Q[i-1,j]$ et dx.

On complète le code:

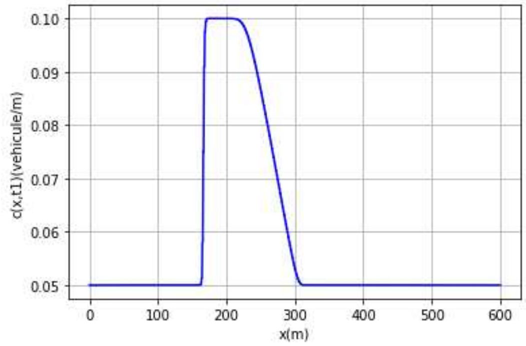
```python
for j in range(0,Nt):
    Q= instruction 6
    for i in range(0,Nx+1):
        C[i,j+1]=   instruction 7
```

```python
plt.plot(x,C[:, N ],'b')
plt.grid()
plt.xlabel('x(m)')
plt.grid()
plt.ylabel('c(x,t1)(vehicule/m)')
plt.grid()
plt.show()
```

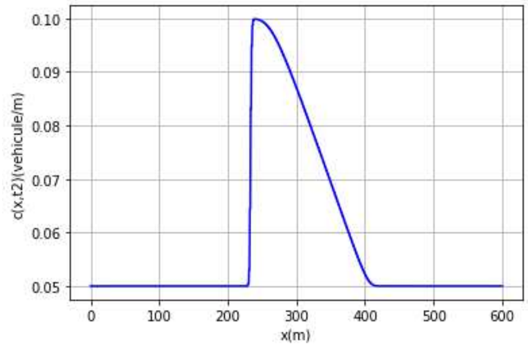
8. Ecrire sur votre copie les instructions 6 et 7.

9. L'exécution du code donne les courbes de concentrations de voitures en fonction de x pour différentes valeurs de N.

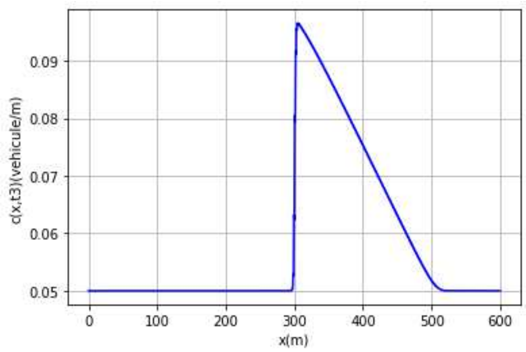
Pour $N = 200$



Pour $N = 400$



Pour $N = 600$



Déduire du code la valeur numérique de dt et en déduire les instants t_1, t_2 et t_3 correspondants à ces trois courbes.

Déduire des courbes, la vitesse des voitures à l'avant de la zone de trafic dense. Commenter cette valeur en vous appuyant sur la courbe $v(x, t = 0)$ (question 5).

Comment évolue la zone de forte densité de voitures au cours du temps?