Oscillations d'un pendule

I. Exercice 1

1. Soit un pendule simple de longueur l et de masse m repérer par ses coordonnées polaires. Etablir par application du théorème du moment cinétique que θ vérifie une équation différentielle de la forme: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$. En déduire la période des oscillations pour θ petit.

On cherche à résoudre cette équation par deux méthodes différentes: par la méthode d'Euler et par l'utilisation de la fonction odeint.

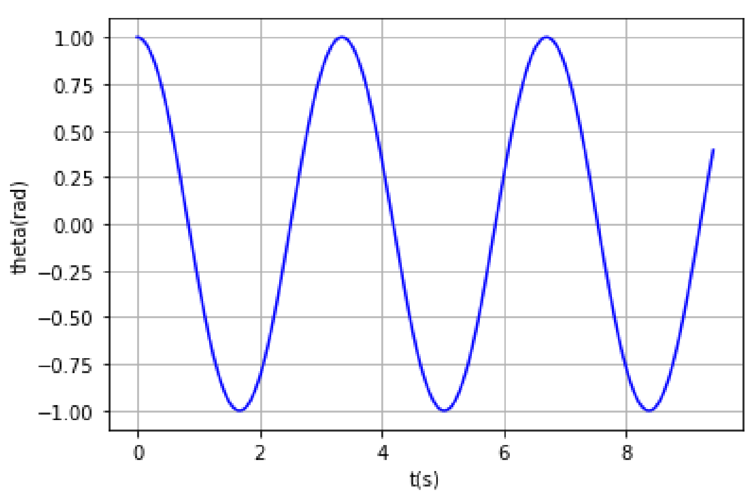
2. L'utilisation de la fonction odeint nécessite d'écrire le système différentiel sous la forme $\dot{X} = F(X,t)$. On pose $X = [\theta, \dot{\theta}]$ et $\dot{X} = F(X,t) = [\dot{\theta}, \ddot{\theta}]$.

2.a. Exprimer $F(X,t)$ en fonction de $X[1]$, $X[0]$ et ω_0.

2.b. On donne le code suivant:

```
1 w0=..........
2 theta0=..........
3 thetapoint0=............
4 t0=0
5 tf=3*2*np.pi/w0
6 N=10000
7 t=np.linspace(t0,tf,N+1)
8 def eqn(X,t):
9 ——return [..................,..................] # renvoie la fonction F(X,t)
10 sol=odeint(eqn,(theta0,thetapoint0),t)
11 A=sol[:,0] # désigne X[0]
12 B=sol[:,1] # désigne X[1]
13 plt.plot(...........,..........)
14 plt.title('N=10000')
15 plt.grid()
16 plt.xlabel('t(s)')
17 plt.ylabel('theta(rad)')
18 plt.grid()
```

L'exécution du code donne la courbe:



2.c. Déduire de la courbe les valeurs numériques pour compléter les lignes 1,2 et 3.

2.d. Compléter les lignes 9 et 13.

2.e. D'après la théorie, à quel temps correspond t_f? Conclure sur la période du pendule par rapport à sa période aux petits angles.

3. On complète le code avec la méthode d'Euler:

19 dt=(tf-t0)/N

20 theta=[...........]

21 thetapoint=[.............]

22 for i in range(N):

23 ——a=..................

24 ——thetapoint.append(thetapoint[i]+a*dt)

25 ——theta.append(................................)

26 plt.plot(t,theta,'– –')

27 plt.plot(t,A)

28 plt.grid()

29 plt.xlabel('t(s)')

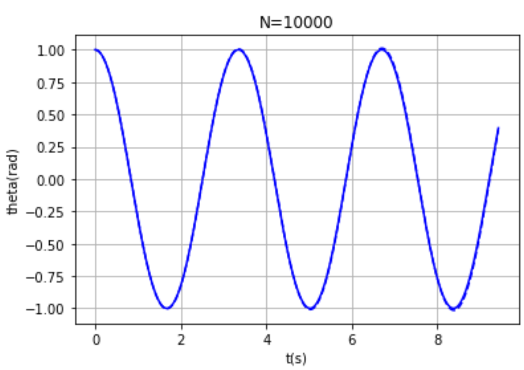
30 plt.ylabel('theta(rad)')

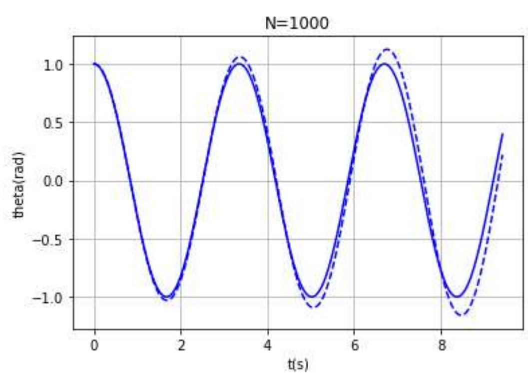
31 plt.show()

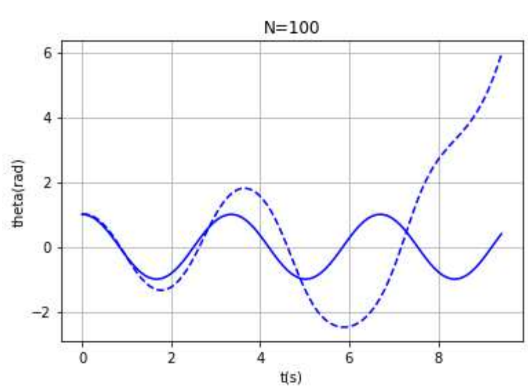
3.a. Compléter les lignes 20 et 21 qui permettent d'initialiser les listes correspondant aux valeurs de θ et de $\dot{\theta}$ à différents instants.

3.b. Rappeler l'expression de $\theta(t + dt)$ en fonction de $\theta(t)$, dt et $\dot{\theta}(t)$ pour dt petit. Rappeler l'expression de $\dot{\theta}(t + dt)$ en fonction de $\dot{\theta}(t)$, dt et $\ddot{\theta}(t)$ pour dt petit. En déduire les lignes 23 et 25.

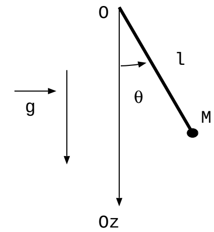
On donne les courbes obtenues pour différentes valeurs de N. Préciser à quelle courbe correspond la courbe en pointillé? la courbe en trait plein? Commenter.







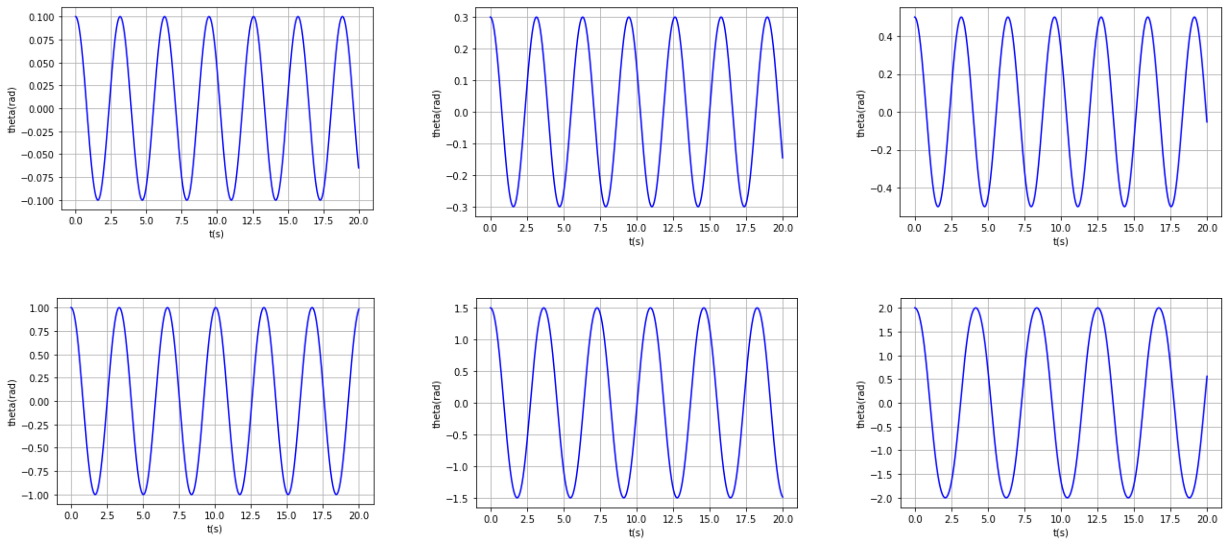
II. **Exercice 2**



1. Soit un pendule simple de longueur l et de masse m repérer par ses coordonnées polaires. Montrer que le système est conservatif en déduire que θ vérifie une équation différentielle de la forme: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$.

On cherche dans cet exercice à étudier l'influence des conditions initiales sur la période du mouvement.

2. On donne les courbes obtenues par la résolution avec odeint pour différentes valeurs de $\theta(t = 0)$ avec $\dot{\theta}(t = 0) = 0$.



Sur chacune des courbes, lire la valeur de θ_0 puis mesurer la période T des oscillations correspondantes. Commenter les résultats. On parle d'isochronisme des oscillations lorsque la période ne dépend pas de l'amplitude des oscillations, pour quelles amplitudes y-a-t-il isochronisme? Relier cette propriété à l'équation différentielle vérifiée par θ dans ce cas et donner la valeur numérique de ω_0.

3. L'équation du pendule simple n'a pas de solution analytique. On peut cependant déterminer une expression intégrale théorique de la période des oscillations en fonction de l'amplitude θ_0 des oscillations et de la pulsation ω_0.

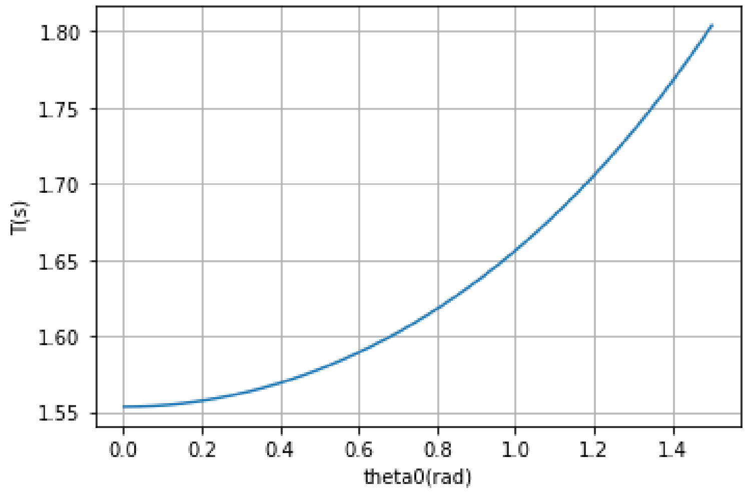
3.a. Déduire de la conservation de l'énergie mécanique entre θ et θ_0 puis effectuer une séparation des variables pour montrer que $T(\theta_0) = \dfrac{2\sqrt{2}}{\omega_0} \displaystyle\int_{\theta=0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$.

3.b. On donne le code suivant pour calculer cette période à l'aide de la méthode des rectangles:

```
w0=..........
def rect(theta0):
——s=...........
——theta=0
——N=10000
——dtheta=theta0/N
——for i in range(N-1):
————-theta=i*dtheta
————-s=s+....................................
——return .........................
theta=np.linspace(0.0,2,500)
plt.plot(theta,rect(theta))
plt.xlabel('theta0(rad)')
```

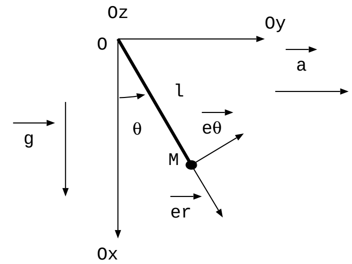
```
plt.ylabel('T(s)')
plt.grid()
plt.show()
```

On donne le résultat de l'exécution du code:



Compléter le code pour que la fonction rect(theta0) renvoie la valeur numérique de la période par la méthode des rectangles. Commenter la courbe en précisant s'il y a isochronisme des oscillations et calculer la valeur numérique de ω_0.

III. **Exercice 3**



Un pendule simple de longueur l et de masse m est repéré par l'angle θ qu'il fait par rapport à la verticale. Ce pendule est accroché au plafond d'un wagon qui possède une accélération constante $\overrightarrow{a} = a\overrightarrow{e_y}$. Ce pendule subit la force de frottements de type fluide $\overrightarrow{f} = -mh\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ désigne la vitesse du pendule dans le référentiel d'étude lié au wagon.

1. Le référentiel $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ lié au wagon est-il galiléen?

2. Montrer que θ vérifie une équation différentielle de la forme $\ddot{\theta} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2(\sin\theta + \dfrac{a}{g}\cos\theta) = 0$. Exprimer ω_0 et Q en fonction des données et exprimer la position d'équilibre θ_e en fonction de a et g.

3. On résout cette équation différentielle avec la fonction odeint du module integrate. L'utilisation de la fonction odeint nécessite d'écrire le système différentiel sous la forme $\dot{X} = F(X, t)$. On pose $X = [\theta, \dot{\theta}]$ et $\dot{X} = F(X, t) = [\dot{\theta}, \ddot{\theta}]$.

On donne le code suivant:

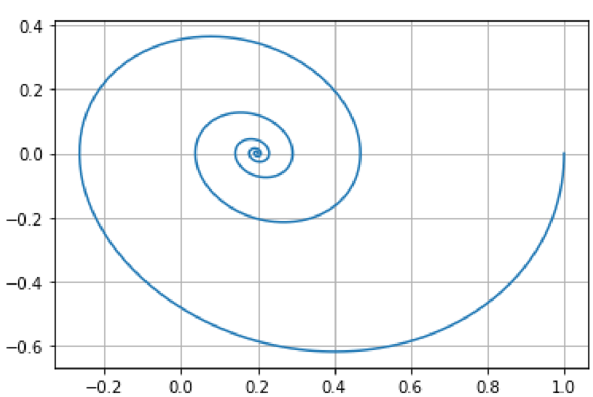
```
1 w0,T0=1,2*np.pi/w0
2 Q,a,g=.....,........,10
3 theta0,thetapoint0=...........,........... # désignent les CI: θ(t = 0) et θ̇(t = 0)
4 def eqn(X,t):
5 ——return [...................,......................;,............................]
6 t=np.linspace(0,8*T0,1000)
7 sol=odeint(eqn,(theta0,thetapoint0),t)
8 A=sol[:,0]
9 B=sol[:,1]
10 plt.plot(A,B)
11 plt.grid()
12 plt.show()
```

3.a. Exprimer $F(X, t)$ en fonction de $X[1]$, $X[0]$, ω_0, Q, a et g. Compléter la ligne 5.

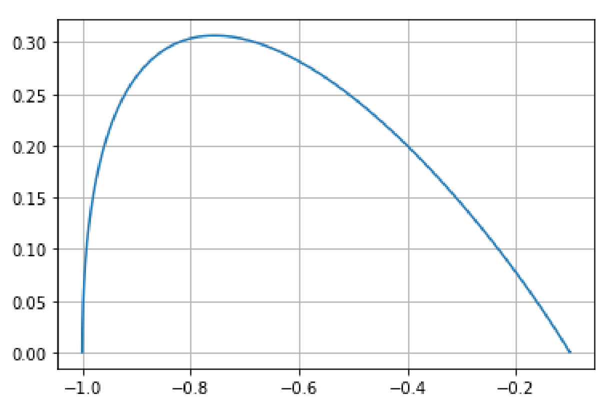
3.b. Préciser les variables en ordonnées et en abscisses sur le graphe correspondant à la ligne 10.

3.c. On donne l'exécution du code pour trois valeurs différentes de Q qui sont $Q = 0,5$, $Q = 3$ et $Q = 5$.

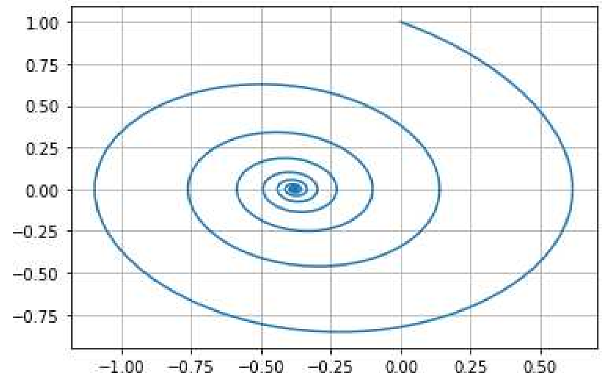
Graphe 1



Graphe 2



Graphe 3



Préciser à quelle valeur de Q correspond chacun des graphes. Donner le nom du régime observé. Déduire des courbes les valeurs numériques de $\theta(t = 0)$, $\dot{\theta}(t = 0)$ et a.