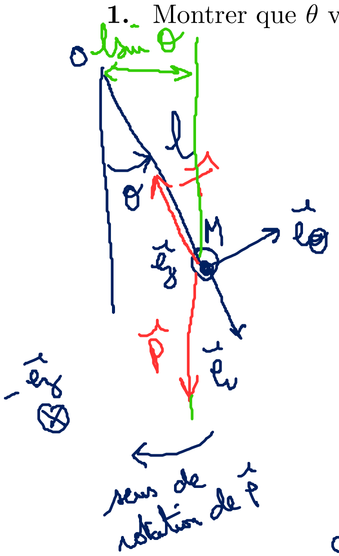
I. Exercice 1

1. Montrer que θ vérifie une équation différentielle de la forme: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$.



TMC appliqué à M : $\left.\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt}\right)_R = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T})$

$\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)_R = l\vec{e}_r \wedge ml\dot{\theta}\vec{e}_\theta = ml^2\dot{\theta}\vec{e}_z$

$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{0}$ car $\vec{T}$ est incapable de faire tourner M autour de O

$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = (-\vec{e}_z)\, mg\, l\sin\theta$

d'où $ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$ soit $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$ (*)

avec petits angles : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ OH. de pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \sqrt{g/l}}$

2. On pose $X = [\theta, \dot{\theta}]$ et $\dot{X} = F(X,t) = [\dot{\theta}, \ddot{\theta}]$.

$X[0] = \theta \qquad X[1] = \dot{\theta}$

$F(X,t) = [\dot{\theta}, \ddot{\theta}] = \dot{X}$

$= [X[1], -\omega_0^2 \sin(X[0])]$

```
w0=...2......
theta0=...1.....
thetapoint0=....0......
t0=0
tf=3*2*np.pi/w0
N=10000
t=np.linspace(t0,tf,N+1)
def eqn(X,t):
——return [..X[1], -W0**2*np.sin(X[0])..] = F(X,t)
sol=odeint(eqn,(theta0,thetapoint0),t)
A=sol[:,0] # désigne X[0] = θ(t)
B=sol[:,1] # désigne X[1] = θ̇(t)
plt.plot(..t.....,..A......)
plt.title('N=10000')
plt.grid()
plt.xlabel('t(s)')
plt.ylabel('theta(rad)')
plt.grid()
```

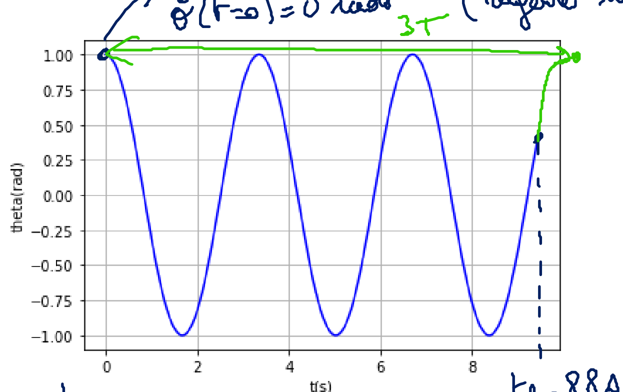
C.I. : $\theta(t=0)$, $\dot{\theta}(t=0)$

$t_f = 3\frac{2\pi}{\omega_0} \rightarrow \omega_0 = 3 \times \frac{2\pi}{t_f} = 3\frac{2\pi}{8{,}8} = 2 \text{ rad.s}^{-1}$

L'exécution du code donne la courbe:

$\theta(t=0) = 1$ rad

$\dot{\theta}(t=0) = 0$ rad.s^{-1} (tangente horizontale à t=0)



$t_0 = 0$ s $\qquad t_f = 8{,}8$ s

D'après la théorie, à quel temps correspond t_f ? Conclure sur la période du pendule par rapport à sa période aux petits angles.

$t_f = 3\,\frac{2\pi}{\omega_0} = 3T_0$

où T_0 est la période de l'OH d'Eq $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

T : période du pendule

on a : $\boxed{T > T_0}$

$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$

3. On complète le code avec la méthode d'Euler:

C.I.

calcul de $\theta(t)$

```
dt=(tf-t0)/N   # pas de temps
theta=[theta0]
thetapoint=[thetapoint0]
for i in range(N):
——a=-w0**2*np.sin(theta[i])
——thetapoint.append(thetapoint[i]+a*dt)
——theta.append(theta[i]+thetapoint[i]*dt)
plt.plot(t,theta,'– –')
plt.plot(t,A)
plt.grid()
plt.xlabel('t(s)')
plt.ylabel('theta(rad)')
plt.show()
```

$\theta(t+dt) = \theta(t) + \dot{\theta}(t)\times dt$ DL. à l'ordre 1 en dt

$\theta[i+1] = \theta[i] + \dot{\theta}[i] * dt$

$\dot{\theta}(t+dt) = \dot{\theta}(t) + \underbrace{\ddot{\theta}(t)}_{= -\omega_0^2 \sin\theta} dt$

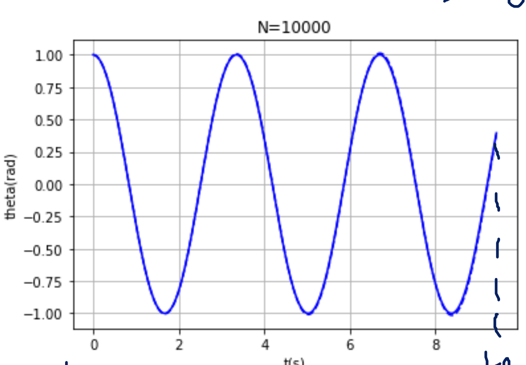
$\dot{\theta}[i+1] = \dot{\theta}[i] \underline{- \omega_0^2 \sin\theta[i] * dt}$

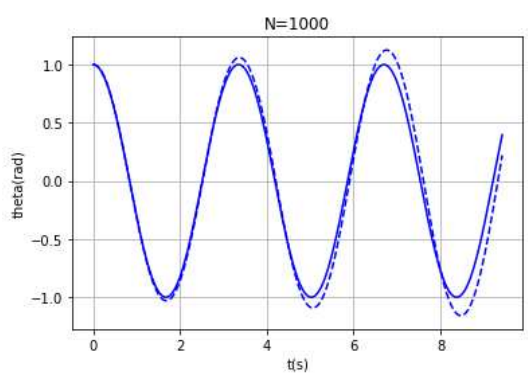
courbe $\theta(t)$ en pointillés par la méthode d'Euler

On donne les courbes obtenues pour différentes valeurs de N. Préciser à quelle courbe correspond la courbe en pointillé? la courbe en trait plein? Commenter.

$\theta(t)$ par la méthode d'Euler

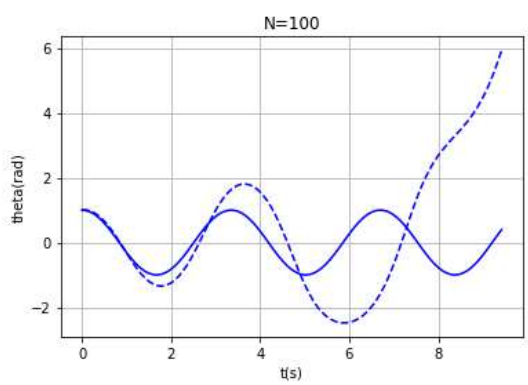
$\theta(t)$ par odeint





intervalle $[t_0, t_f]$ découpé en N petits intervalles de pas $dt = \frac{t_f - t_0}{N}$

Plus N est grand et plus le pas de temps dt est petit



la solution avec la méthode d'Euler diverge quand N ↓

pour N = 10000 : la méthode d'Euler donne une réponse juste

pour N = 100 et N = 1000 : la méthode d'Euler donne des résultats faux

la méthode d'Euler repose sur des DL en dt, pour ces DL soient valables il faut que dt soit petit, il faut N grand.