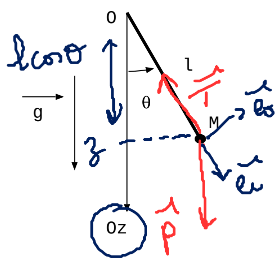
I. Exercice 2

Système conservatif

$\vec{T}$ ne travaille (Ep doit ↑ quand on monte)

$\vec{P}$ conservatif : $E_p = -mgz = -mgl\cos\theta$

1.



$E_m = \text{Cste} = \frac{mv^2}{2} - mgl\cos\theta$ avec $\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$E_m = \text{Cste} = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} - mgl\cos\theta$

$\frac{d(\dot{\theta}^2)}{dt} = 2\dot{\theta}\times\ddot{\theta}$

$\frac{d\cos\theta}{dt} = \frac{d\cos\theta}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dt} = -\sin\theta\,\dot{\theta}$

$\frac{dE_m}{dt} = 0 = ml^2\cancel{\dot{\theta}}\ddot{\theta} + mgl\sin\theta\cancel{\dot{\theta}}$

soit $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$ avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{g/l}}$

2.

pour $\theta_0 < 0{,}5$ rad T ne dépend pas de θ_0, on a affaire à un O.H. d'ép $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

$\theta_0 = 0{,}1$ rad $6T = 18{,}2$ s

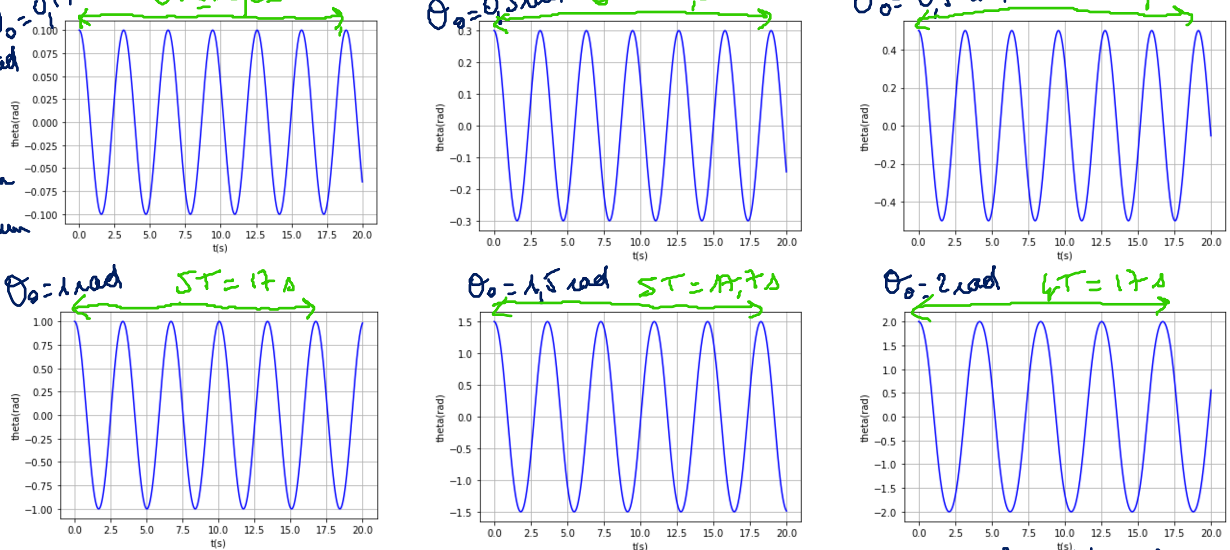
$\theta_0 = 0{,}3$ rad $6T = 18{,}2$ s

$\theta_0 = 0{,}5$ rad $6T = 18{,}2$ s

$\theta_0 = 1$ rad $5T = 17$ s

$\theta_0 = 1{,}5$ rad $5T = 17{,}7$ s

$\theta_0 = 2$ rad $4T = 17$ s



$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ avec $T_0 = \frac{18{,}2}{6}$

$T_0 \simeq 3{,}1$ s

$\omega_0 \simeq 2$ rad.s^{-1}

La période ne dépend pas de l'amplitude pour $\theta_0 \leq 0{,}5$ rad ; on parle d'isochronisme c'est une particularité de l'O.H. En effet la pulsation / la période est donnée par son ép. différentielle, elles sont constantes.

La période dépend de l'amplitude des oscillations pour $\theta_0 \geq 1$ rad, elle augmente quand l'amplitude augmente.

θ_0 : amplitude des oscillations, à ce maximum d'amplitude : $v(\theta_0) = 0$

3.

3.a. Montrer que $\boxed{T(\theta_0) = \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0}\int_{\theta=0}^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}}$.

$E_m = \frac{mv^2}{2} - mgl\cos\theta = \cancel{\frac{mv^2(\theta_0)}{2}} - mgl\cos\theta_0$

d'où $v^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\theta_0) = l^2\dot{\theta}^2$

$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = +\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}$

θ varie de $-\theta_0$ à $+\theta_0$

$\int_{\theta=0}^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \int_0^{T/4}\sqrt{\frac{2g}{l}}\,dt = \sqrt{2}\,\omega_0\frac{T}{4}$

$T = \frac{4}{\sqrt{2}\,\omega_0}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$, avec $\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

3.b. On donne le code suivant pour calculer cette période à l'aide de la méthode des rectangles:

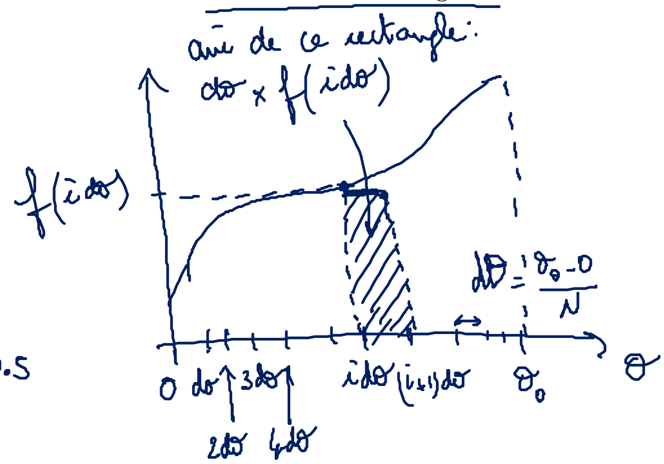
```
w0=2*np.pi/1.56
def rect(theta0):
    s=0
    theta=0
    N=10000
    dtheta=theta0/N
    for i in range(N-1):
        theta=i*dtheta
        s=s+dtheta/(np.cos(theta)-np.cos(theta0))**0.5
    return s*2*2**0.5/w0
theta=np.linspace(0.0,2,500)
plt.plot(theta,rect(theta))
plt.xlabel('theta0(rad)')
plt.ylabel('T(s)')
plt.grid()
plt.show()
```

N grand

rectangles dont la base est très étroite pour confondre l'aire sous la courbe avec l'aire du rectangle

$dtheta = \frac{\theta_0 - 0}{N}$

rect(theta) → $T(\theta)$

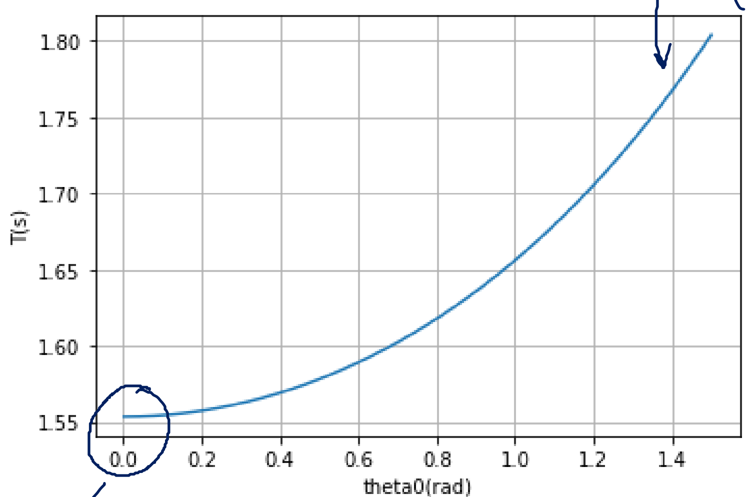


ici $f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$

On donne le résultat de l'exécution du code:

$$T(\theta_0) = \frac{2\sqrt{2}}{w_0} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

période des oscillations →



amplitude des oscillations

pour des amplitudes > 0,1 rad, la période dépend de l'amplitude :

T augmente quand l'amplitude augmente

T ne dépend pas de l'amplitude des oscillations : aux petits angles l'ép. du pendule est l'ép. d'un OH.

$w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ avec $T_0 \simeq 1{,}56$ s