

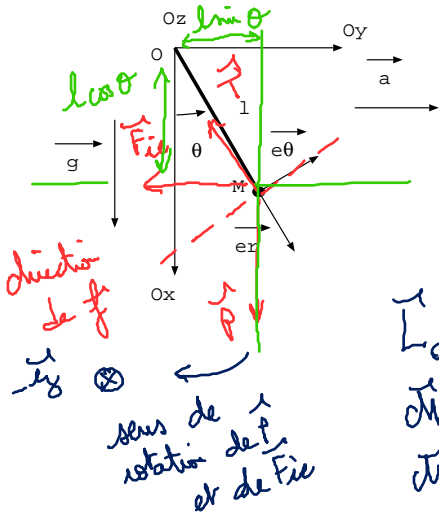
### I. Exercice 3

Ce pendule est accroché au plafond d'un wagon qui possède une accélération constante  $\vec{a} = a\vec{e}_y$ . Ce pendule subit la force de frottements de type fluide  $\vec{f} = -mh\vec{v}$  où  $\vec{v}$  désigne la vitesse du pendule dans le référentiel d'étude lié au wagon.

1. Le référentiel  $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  lié au wagon est en translation rectiligne non uniforme dans  $\mathcal{R}_I$  terrestre supposé galiléen donc  $\mathcal{R}$  n'est pas galiléen

2. Montrer que  $\theta$  vérifie une équation différentielle de la forme  $\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2(\sin\theta - \frac{a}{g}\cos\theta) = 0$ .

$\mathcal{R}$  est translation



M subit dans  $\mathcal{R}$ :

\*  $\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}$  force d'inertie d'entraînement ( $\vec{F}_{ic} = \vec{0}$ )

\* les forces d'interaction:  $\vec{P}, \vec{T}, \vec{f}$

THC appliquée à M de  $\mathcal{R}$ :  $\frac{d\vec{L}_O(u)}{dt} = \frac{d\vec{L}_O(\vec{P})}{dt} + \frac{d\vec{L}_O(\vec{T})}{dt} + \frac{d\vec{L}_O(\vec{F}_{ic})}{dt} + \frac{d\vec{L}_O(\vec{f})}{dt}$   
car  $\vec{T}$  est incapable de faire tourner M autour de O

$$\vec{L}_O(u) = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = l\vec{e}_1 \wedge ml\dot{\theta}\vec{e}_2 = ml^2\dot{\theta}\vec{e}_3$$

$$\frac{d\vec{L}_O(\vec{P})}{dt} = (-\vec{e}_y) mg l \sin\theta$$

$$\frac{d\vec{L}_O(\vec{F}_{ic})}{dt} = (-\vec{e}_y) ma l \cos\theta$$

$$\frac{d\vec{L}_O(\vec{f})}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{f} = l\vec{e}_1 \wedge (-mh l \dot{\theta} \vec{e}_2) = -mh l^2 \dot{\theta} \vec{e}_3$$

$$d'oi: ml^2\ddot{\theta} = -mg l \sin\theta - ma l \cos\theta - mh l^2 \dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + h\dot{\theta} + \frac{g}{l}(\sin\theta + \frac{a}{g}\cos\theta) = 0$$

avec  $\omega_0 = \sqrt{gl}$

$\frac{\omega_0}{Q} = h$

$Q = \frac{\omega_0}{h}$

+ il y a de frottements plus Q est petit

3. On pose  $X = [\theta, \dot{\theta}]$  et  $\dot{X} = F(X, t) = [\dot{\theta}, \ddot{\theta}]$ .

$X[0] = \theta$      $X[1] = \dot{\theta}$

On donne le code suivant:

```
1 w0,T0=1,2*np.pi/w0
```

```
2 Q,a,g=.....,.....,10
```

```
3 theta0,thetapoint0=.....
```

```
4 def eqn(X,t):
```

```
5     return [X[1], -w0/Q*X[1] - w0**2*(np.sin(X[0]) + a/g*np.cos(X[0]))] = \dot{X} = F(X,t)
```

```
6 t=np.linspace(0,8*T0,1000)
```

```
7 sol=odeint(eqn,(theta0,thetapoint0),t)
```

```
8 A=sol[:,0] = X[0] = theta(t)
```

```
9 B=sol[:,1] = X[1] = theta_dot(t)
```

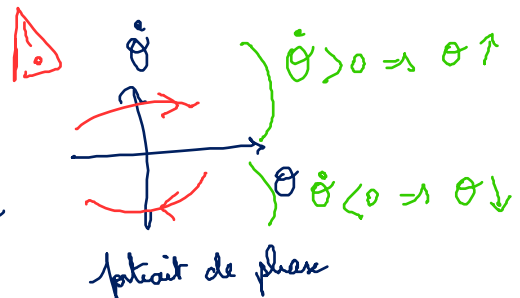
```
10 plt.plot(A,B)
```

```
11 plt.grid()
```

```
12 plt.show()
```

C.I.

combre avec  $\theta(t)$  en abscisse  
 $\dot{\theta}(t)$  en ordonnée



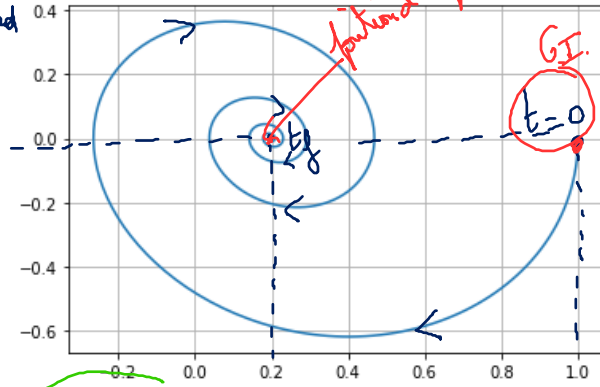
portrait de phase

+ il y a de frottements, + Q est petit

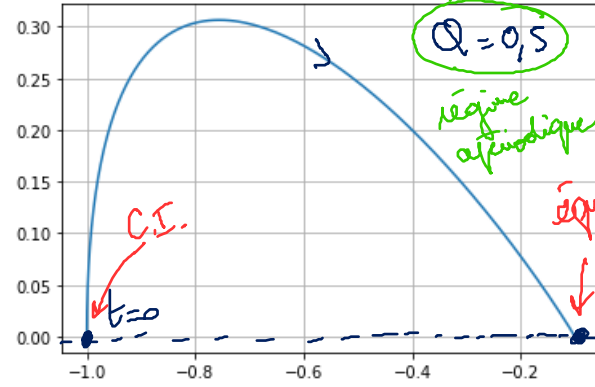
On donne l'exécution du code pour trois valeurs différentes de Q qui sont Q = 0,5, Q = 3 et Q = 5.

$\ddot{\theta}(t_f) = 0$  : position d'équilibre  
 $\theta(t_f) = 0,2 \text{ rad}$   
 $\dot{\theta}(t_f) = 0$

Graph 1



Graph 2

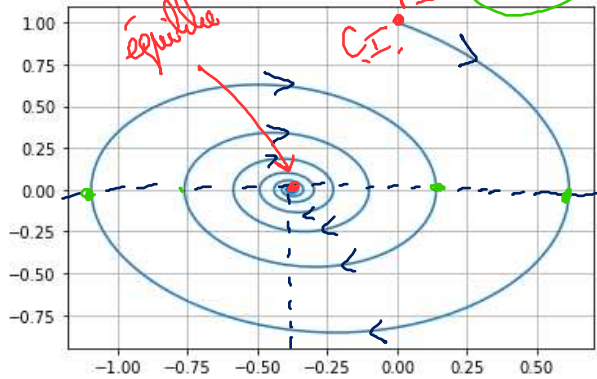


C.I.:  
 $\theta(t=0) = 1$   
 $\dot{\theta}(t=0) = 0$

$Q = 3$

régime pseudo-périodique  
 (moins d'oscillations que sur le graphe 3 avec + de frottements que sur le graphe 3)

Graph 3



$Q = 5$

peu de frottements, beaucoup d'oscillations  
 Q grand  
 régime pseudo-périodique  
 $\theta(t=0) = 0$   
 $\dot{\theta}(t=0) = 1 \text{ rads}^{-1}$   
 $\theta(t_f) = -0,4 \text{ rad}$

Préciser à quelle valeur de Q correspond chacun des graphes. Donner le nom du régime observé. Déduire des courbes les valeurs numériques de  $\theta(t=0)$ ,  $\dot{\theta}(t=0)$  et  $a$ .

$$\ddot{\theta} + \frac{W_0}{Q} \dot{\theta} + W_0^2 \left( \sin \theta + \frac{a}{g} \cos \theta \right) = 0 \quad \text{à l'équilibre : } \dot{\theta} = 0 \quad \ddot{\theta} = 0$$

$$\sin \theta_e = -\frac{a}{g} \cos \theta_e \Rightarrow \tan \theta_e = -\frac{a}{g}$$

On trouve a en appliquant :  $a = -g \tan \theta_e$  |  $\theta_e = \theta(t_f)$   
 $g = 10 \text{ ms}^{-2}$

