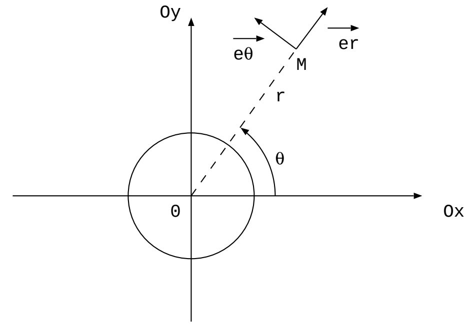
Force centrale

On considère la Terre comme une sphère homogène de rayon R_t et de masse totale M_t. On note O la position de son centre. On note $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle. On étudie le mouvement d'un satellite de masse m dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. On néglige les frottements exercés sur le satellite. On suppose que le mouvement du satellite est plan, on repère sa position par ses coordonnées polaires (r, θ) dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$.

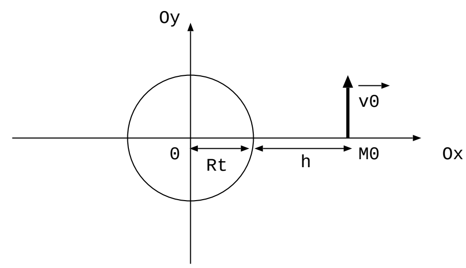


1. Exprimer la force gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite. Exprimer le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ du satellite en coordonnées polaires et montrer que $C = \dfrac{L_O}{m} = r^2\dot{\theta}$ est une constante.

2. Exprimer la vitesse du satellite en fonction de r, $\dot{r}$, C et des vecteurs de base.

3. Montrer que l'énergie mécanique du satellite est constante et exprimer son énergie mécanique en fonction de m, v, $\mathcal{G}$, m, M_t et r puis en fonction de r, $\dot{r}$, C, $\mathcal{G}$, m et M_t. En déduire que r vérifie l'équation différentielle: $\ddot{r} = \dfrac{C^2}{r^3} - \dfrac{\mathcal{G}M_t}{r^2}$ $(*)$.

On souhaite mettre ce satellite sur orbite pour cela à l'instant $t = 0$, il se trouve sur l'axe Ox à l'altitude h et possède une vitesse orthoradiale de norme v_0.



4. Déterminer la vitesse à communiquer au satellite pour qu'il décrive une trajectoire circulaire de rayon $R_t + h$ autour de la Terre. On note v_1 cette vitesse. Exprimer la période T_1 du satellite dans ce cas.

5. On appelle vitesse de libération la vitesse v_0 à communiquer à ce satellite pour qu'il échappe à l'attraction de la Terre, il faut pour cela que son énergie mécanique soit positive ou nulle. En déduire la vitesse minimale à communiquer au satellite pour qu'il échappe à l'attraction de la Terre depuis le point d'altitude h. On note v_2 cette vitesse.

6. On souhaite tracer la trajectoire du satellite pour différentes valeurs de v_0 en utilisant la méthode d'Euler. On donne le code suivant:

```
G,Rt,Mt=6.67e-11,6.4e6,5,97e24
h=0.5*Rt
v1=..................# vitesse pour une trajectoire circulaire
T1=.................. # période de la trajectoire circulaire
v2=................... # vitesse minimale pour que le satellite échappe à l'attraction de la Terre
N=10000
t=np.linspace(0,T,N)
def euler(v0):
——C=............
——r=np.zeros((N)) # on crée un vecteur les valeurs de r aux différents instants, pour le moment ce vecteur contient N zéros
——theta=np.zeros((N)) # on crée un vecteur les valeurs de θ aux différents instants, pour le moment ce vecteur contient N zéros
——r[0]=.............. # r(t = 0)
```

```
13 ——theta[0]=..............# θ(t = 0)
14 ——dt=T/(N-1)
15 ——vr=.................. # vr désigne la vitesse radiale ṙ, on initialise vr
16 ——for i in range(0,N-1):
17 ————ar=..................
18 ————vr=..................
19 ————theta[i+1]=........................
20 ————r[i+1]=.................
21 ——return r,theta
22 for v0 in [v1,1.2*v1,v2,1.2*v2]:
23 ——r=euler(v0)[0] # vecteur qui contient les valeurs de r(t)
24 ——theta=euler(v0)[1] # vecteur qui contient les valeurs de θ(t)
25 ——x=..............................
26 ——y=..............................
27 ——plt.axis('equal')
28 ——plt.plot(x,y)
29 ——plt.show()
```

6.a. Compléter les lignes 3,4 et 5.

6.b. Exprimer le moment cinétique du satellite à l'instant $t = 0$ et en déduire l'expression de C en fonction de R_t, h et v_0. Compléter la ligne 9.

6.c. ar désigne $\ddot{r}$. Compléter la ligne 17 à l'aide de $(*)$.

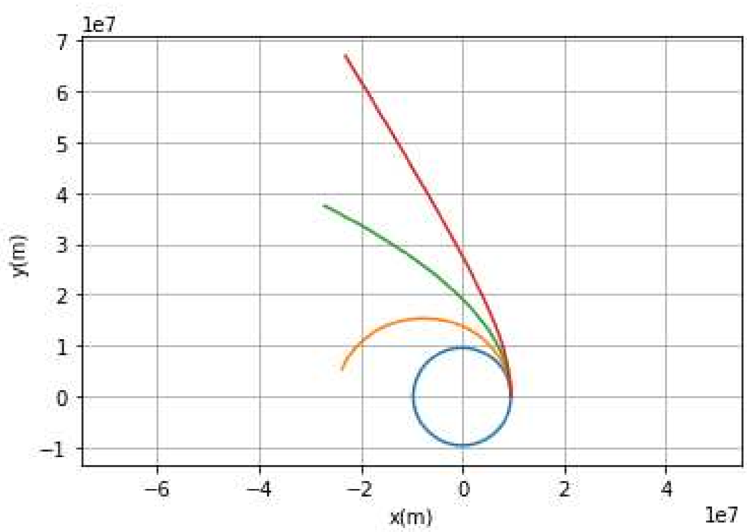
6.d. Pour un pas de temps dt petit, exprimer $r(t+dt)$ en fonction de $r(t)$, $v_r(t)$ et dt ($v_r(t)$ désigne $\dot{r}$). Compléter la ligne 20.

6.e. Pour un pas de temps dt petit, exprimer $v_r(t+dt)$ en fonction de $v_r(t)$, $a_r(t)$ et dt. Compléter la ligne 18.

6.f. Pour un pas de temps dt petit, exprimer $\theta(t+dt)$ en fonction de $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ et dt puis en fonction de $\theta(t)$, C, $r(t)$ et dt. Compléter la ligne 19.

6.g. Exprimer x et y (coordonnées cartésiennes de M) en fonction de r et θ (coordonnées polaires de M). Compléter les lignes 25 et 26.

6.h. On donne le résultat de l'exécution du code:



Déduire du code les vitesses qui correspondent à chacune de ces trajectoires et donner la nature de la conique décrite pour chacune de ces vitesses.

6.i. Question difficile : On souhaite tracer la trajectoire elliptique sur une période entière, pour cela on recherche l'expression de cette période. On désigne l'apocentre par A, r_A est la distance OA et v_A est la norme de la vitesse de A en ce point. Déduire de la conservation du moment cinétique et de l'énergie mécanique entre les points M_0 et A que r_A vérifie l'équation $r_A^2 + \frac{\mathcal{G}M_t r_A}{e_m} - \frac{C^2}{2e_m} = 0$ avec $e_m = \frac{v_0^2}{2} - \frac{\mathcal{G}M_t}{R_t + h}$.

```
em=v0**2/2-G*Mt/(Rt+h)
C=(Rt+h)*v0
d1=(G*Mt/em)**2-2*c**2/em
d2=-G*Mt/em/2+(d1**0.5/2)
```

Le code renvoie $d2 = 2.4687e7$.

Déduire de ce résultat, la valeur numérique du demi grand axe de l'ellipse a et la valeur numérique de la période du satellite sur cette ellipse.